

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Amine Elokhal Elhadj Moussa Eg Akhamouk  
Tamanrasset**



Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Sciences et de la Technologie

**ANALYSE ET MODELISATION HYDROLOGIQUE**

**Cours et exercices d'application**

Semestre : 1

Unité d'enseignement : UEM 1.1.1

1<sup>re</sup> année Master Ressources en Eau

OULAD NAOUI Nouredine  
Université de Tamanrasset  
Faculté des Sciences et Technologie  
<http://www.cu-tamanrasset.dz>

2022



## Liste des Tables

Table 1.1 Caractéristiques de la loi normale	2
Table 1.2 La fonction de répartition	4
Table 1.3 les débits de crue du bassin versant Boumassoud	5
Table 1.4 les valeurs de pressions observées et théoriques	10
Table 1.5 Le tableau de contingence	10
Table 1.6 la durée de vie des pompes en heur	11
Table 1.7 Formalisation de l'hypothèse Kolmogorov-Smirnov	11
Table 1.8 Valeurs de coefficients de frottement	13
Table 1.9 les valeurs des effectifs théoriques	13
Table 2.1 les débits de crue observées et simulées du bassin versant Boumassoud	15
Table 2.2 Une série chronologique sous la forme d'un tableau	16
Table 2.2 Une série chronologique sous la forme d'une matrice	17
Table 2.3 Les débits de crue et les effectifs pour le bassin versant Boumassoud	18
Table 2.4 Les valeurs extrêmes du bassin versant Boumassoud	19



## Liste des Figures


<b>Fig2.1</b> Corrélation linéaire	16
<b>Fig 2.2</b> l'hydrogramme de crue du bassin versant Boumassoud	17
<b>Fig2.3</b> Graphiques des courbes superposées	18
<b>Fig 2.4</b> l'interface graphique de l'HYFRAN	20
<b>Fig2.5</b> création d'un projet	20
<b>Fig2.6</b> Spécification du nom du projet	21
<b>Fig2.7</b> Spécification de type d'un variable	21
<b>Fig2.8</b> l'insertion des données	22
<b>Fig2.9</b> les paramètres statistiques	22
<b>Fig2.10</b> type de l'hypothèse de teste	23
<b>Fig2.11</b> représentation graphiquement des données	23
<b>Fig2.12</b> Changement de type de graphe	24
<b>Fig2.13</b> L'ajustement d'une distribution	24
<b>Fig.3.1.</b> Schématisation d'un bassin versant topographique (SIAG)	26
<b>Fig.3.2.</b> Schématisation des paramètres de la fonction de production	28
<b>Fig.3.3.</b> Schématisation des paramètres de la fonction de transfert	28
<b>Fig.3.4.</b> Représentation du fonctionnement d'un modèle hydrologique	29
<b>Fig.3.5.</b> Les Modèles hydrologiques	32
<b>Fig.3.6.</b> Schématisation d'un modèle Boite noir	34
<b>Fig3.7</b> l'interface graphique de MIKE Zero	35
<b>Fig 3.8</b> Création d'un nouveau projet pour MIKE Zero	36
<b>Fig3.9</b> Création d'un réseau hydrographique pour MIKE Zero	37
<b>Fig 3.10</b> visualisation d'un réseau hydrographique	38



Fig 3.11 vérification des données	39
Fig 3.12 affichage des détails	39
Fig3.13 Éditeur de la coupe	40
Fig 3.14 spécification des caractéristiques du bassin	40
Fig 3.15 les coordonnées des points	41
Fig 3.16 l'insertion d'une coupe supplémentaire	41
Fig 3.17 Éditeur de séries temporelles	42
Fig 3.18 l'introduction des données	42
Fig 3.19 Éditeur de limites	43
Fig 3.20 les conditions aux limites	45
Fig 3.21-a Éditeur de paramètres HD	45
Fig 3.21-b Éditeur de paramètres HD	46
Fig 3.22-a Editeur de simulation	46
Fig 3.22-b Editeur de simulation	47







## Introduction

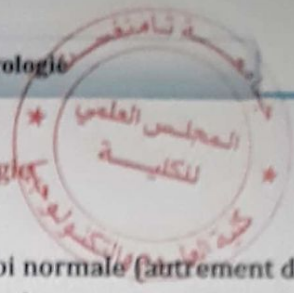
Dans le sens hydrologique, la statistique hydrologique traite des données hydrologiques tel que les données hydro-météorologiques, température et évaporation. L'objectif de l'analyse statistique appliqué à l'hydrologie consiste à caractériser une série à partir d'une image plus ou moins floue . On peut alors chercher à extrapoler une information obtenue à partir de l'échantillon ( CURTIS F.Gerald Patrick O.Wheatley 1997 ; V. Monbet 2009). Les écoulements superficiels est la partie cachée du cycle hydrologique. C'est la raison pour laquelle certaines de leurs caractéristiques, mesurables ponctuellement seulement, restent parfois incertaines. Cependant, l'étude de ces écoulements et ces ressources qu'ils sont susceptibles de nous fournir ne peut être négligée dans la gestion quantitative et qualitative des eaux.

L'objectif de ce travail sera de proposer une note de cours avec des exemples qui permettre l'étudiant à :

- Résolution orientée vers l'exécution précise et l'analyse rationnelle des mesures et observations portant sur les facteurs hydrométéorologiques d'un phénomène, en vue d'élucider son mécanisme et ses lois de probabilité, son objectif sera souvent de mettre sur pied des méthodes de prédétermination quantitative de l'amplitude ou de la probabilité d'occurrence du dit phénomène.
- Etude est la prévision du débit des crues, soit en fonction des débits exceptionnels observés sur une longue série d'années, soit en fonction des précipitations qui les produisent.
- Utiliser différentes approches de modélisation hydrologique pour déterminer la relation pluie-débit, dans le but de prévision ou d'utilisation de tels modèles pour des bassins non jaugés

La méthodologie de ce travail sera organisée comme suit :

- Chapitre : 1 notion de probabilité et d'analyse statistiques appliquée à l'hydrologie. Après ce chapitre, les étudiantes auront maîtrisé les types de fonctions de distribution (ou de densité) en hydrologie, quelques théories et testes générales de l'ajustement statistique.
- Chapitre 2 : corrélations et analyse des données. Après ce chapitre, les étudiantes auront maîtrisé les différents types de corrélation et les valeurs caractéristiques d'une série chronologique.
- Chapitre 3 : modélisation hydrologique. Après ce chapitre, les étudiantes auront maîtrisé la modélisation hydrologique, applications hydrologiques de modèles pluie-débit.



1.1 Types de fonctions de distribution (ou de densité) en hydrologie

1.1.1 loi normale

Pour les phénomènes qu'ils ont des comportements Gaussien, la loi normale (autrement dit loi de Gauss) est une loi statistique centrale. De plus, un théorème que nous verrons ultérieurement affirme qu'une moyenne (ou une somme) de variables aléatoires tend (presque) toujours en distribution vers une loi normale. A ce titre une moyenne de variable aléatoire est affirmée par le théorème de la loi normale si cette variable suite une distribution de cette loi (Stewart, I. T., D. R. Cayan, et al., 2005 ; B. Renard 2014).  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement : la moyenne et l'écart-type, représentant les paramètres de loi normale. en hydrologie, la loi normale est utilisée pour la modélisation des paramètres hydrométéorologiques des bassins versants (pluie, débit). La loi normale, notée  $N(\mu, \sigma)$  et représentée mathématiquement par la relation suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

a) Caractéristiques de la loi normale

Si  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  : la loi est appelée la loi normale centrée/réduite.

Si  $\mu \neq 0$  et  $\sigma \neq 1$  : la loi est appelée la loi normale quelconque.

Pour faire des calculs avec loi  $N(\mu, \sigma)$  on se ramène à la loi centrée/réduite à partir le théorème suivant :

Lorsque l'on suppose qu'une variable  $X$  suit à la loi normale  $X \sim N(\mu, \sigma)$  alors

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Pour n'importe quel  $a >$

Table 1.1 Caractéristiques de la loi normale



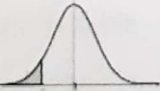
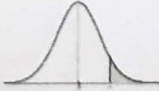
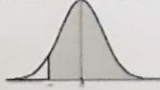

I	$P(X \leq a)$		$\Rightarrow$ table
II	$P(X \geq a)$		$= 1 - \Rightarrow$ cas I
III	$P(X \leq -a)$	 = 	$\Rightarrow$ cas II
IV	$P(X \geq -a)$	 = 	$\Rightarrow$ cas I





Table de la loi normale : Voir annexe 1

b) Exemples :

1. On suppose qu'une certaine variable  $X \sim N(0, 1)$ . Pour quelle proportion d'individus est-ce que  $X \leq 1,82$  ?

Solution :

On cherche  $P(X \leq 1,82)$  (rappel : on écrit aussi  $F(1,82)$ ). On cherche 1,82 dans la table :

Donc  $P(X \leq 1,82) = 0,9656$ .

Pour 96.56 % des individus, la variable  $X$  est inférieure à 1,82.

2. On suppose qu'une certaine variable (Une série de précipitation)  $X \sim N(11; 2)$ . Pour quelle proportion d'individus est-ce que  $X \leq 14$  mm ?

Solution :

On cherche  $P(X \leq 14)$ . On centre et on réduit  $Z = \frac{X-11}{2} \sim N(0, 1)$ .

$$P(X \leq 14) = P\left(Z = \frac{X-11}{2} \leq \frac{14-11}{2}\right) = P(Z \leq 1,5)$$

On cherche 1,5 dans la table. On trouve finalement  $P(X \leq 14) = 0,9332$ .

Donc dans cette série 93.32% des valeurs sont inférieure à 14mm.

3. On suppose qu'une certaine variable  $X \sim N(0, 1)$ . Pour quelle proportion d'individus est-ce que  $X \geq 1,44$  ?

Solution :

On cherche  $P(X \geq 1,44)$ .

On écrit d'abord  $P(X \geq 1,44) = 1 - P(X \leq 1,44) = 1 - F(1,44)$

On cherche 1,44 dans la table

Donc  $P(X \leq 1,44) = 0,9251$ . Soit  $P(X \geq 1,44) = 1 - 0,9251 = 0,0749$ .

### 1.1.2 loi de Gumbel





la loi de Gumbel a pour but de d'écrire le comportement statistique des valeurs extrêmes (J. JACQUET 1964 ; Par J.P. LABORDE 2009 ; B. Renard 2014).

a) Méthode graphique

La fonction de répartition de la loi de Gumbel s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)$$

Avec  $u = \frac{x-a}{b}$  est la variable réduite

a, b sont les paramètres du modèle de Gumbel

donc

$$F(x) = \exp(-\exp(-u))$$

$$u = \ln(-\ln F(x))$$

L'équation linéaire d'un quantile est  $x_q = a + b \cdot u_q$

La fonction de répartition  $F(x)$  est estimée par plusieurs formules

Table 1.2 La fonction de répartition

Nom	$\alpha$	Formule
Weibull	0	$\frac{r}{n+1}$
Cunnane	0.4	$\frac{r-0.4}{n+0.2}$
Gringorten	0.44	$\frac{r-0.44}{n+0.12}$
Hazen	0.5	$\frac{r-0.5}{n}$

Pour Gumbel, la formule de Hazen est la formule la plus utilisée.

b) Méthode des moments

Avec la méthode des moments, l'équation du quantile est donnée par :

$$x_q = \tilde{a} + \tilde{b} \cdot u_q$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} \tilde{a} = \tilde{u} + \tilde{b} \cdot \sigma \\ \tilde{b} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \tilde{\sigma} \end{cases}$$



c) Temps de retour

Le temps de retour T est donnée par :

$$T = \frac{1}{1 - F(x)}$$

d) Exemple

Pour le bassin versant Boumassoud (N.O, Algérie) les débits de crue sont représentés dans le tableau au-dessous :

Table 1.3 les débits de crue du bassin versant Boumassoud

Année	Qpmax
1985	14.29
1986	15.56
1987	5.96
1988	74.5
1989	33.96
1990	52.89
1991	33.88
1992	10.06
1993	7.34
1994	49.65
1995	58.32
1996	70.15
1997	14.03
1998	20.52
1999	1.55
2000	8.24
2001	31.12
2002	13.99
2003	14.25

- 1) Ajuster la série des débits maximums annuels selon une distribution de Gumbel.
- 2) Estimer les débits de pointe de temps de retour, 5, 20, 50, 100 ans.
- 3) Ajuster les données par la méthode des moments. Estimer les débits de pointe de temps de retour, 5, 20, 50, 100 ans.





Solution :

La solution de cet exercice et résumer par ce code matlab

```
%=====Guemle method/moments method=====
%=====data=====
%=====
load nvariable.txt;
load variable.txt;
load retournperiod.txt;
load retournperiodsize.txt;
n=nvariable;
v=variable;
T=retournperiod;
%=====data=====
%=====
%=====rang r=====
for i=1:nvariable
r(i)=i;
end
%=====rang r=====
%=====empirical frequence F=====
for i=1:nvariable
F(i)=(r(i)-0.5)/n;
end
%=====empirical frequence F=====
%=====reduced variable u =====
for i=1:nvariable
u(i)=-log(-log(F(i)));
end
%=====reduced variable u =====
%=====Mean=====
M=sum(v)/n
%=====Mean=====
%=====Standard deviation=====
ectype=std(v)
%=====Standard deviation=====
%=====Gumbel parameter b=====
b=ectype*(sqrt(6)/pi)
%=====Gumbel parameter b =====
%=====Gumbel parameter a =====
a=M-b*0.5772
%=====Gumbel parameter a =====
%=====estimated variable =====
for i=1:nvariable
EV(i)=a+u(i)*b;
end
EV=EV
%=====estimated variable =====
%=====probability of not exceeding=====
for i=1:retournperiodsize
Qp(i)=1-(1/T(i));
```





```

end
Qp=Qp
%=====probability of not exceeding=====
%=====reduced variable of gumbel=====
for i=1:retournperiodsize
GRv(i)=-log(-log(Qp(i)));
end
GRv=GRv
%=====probability for T=====
for i=1:retournperiodsize
QpT(i)=a+b*GRv(i);
end
QpT=QpT
%=====probability for T=====

```

Les résultats sont affichés comme suite :

```

>> gumb1
u =

Columns 1 through 11

-1.2913 -0.9318 -0.7071 -0.5257 -0.3649 -0.2149 -0.0701 0.0731 0.2177 0.3665 0.5225

Columns 12 through 19

0.6890 0.8706 1.0737 1.3083 1.5916 1.9584 2.4981 3.6243

M = 27.9084

ectype = 22.7666
b = 17.7511

a = 17.6625

EV =
Columns 1 through 11

-5.2598 1.1228 5.1103 8.3304 11.1852 13.8485 16.4178 18.9596 21.5268 24.1685 26.9366

Columns 12 through 19

29.8925 33.1162 36.7214 40.8855 45.9152 52.4269 62.0071 81.9974

Qp =0.8000 0.9500 0.9800 0.9900

GRv = 1.4999 2.9702 3.9019 4.6001

QpT = 44.2880 70.3867 86.9261 99.3201

```



## 1.2 Valeurs extrêmes d'une variable

En statistique, la théorie qui s'intéresse aux valeurs extrêmes des distributions de probabilité est la théorie des valeurs extrêmes. En hydrologie, et plus particulièrement la prévoir des valeurs des crues, la théorie la plus couramment utilisée est la théorie des valeurs extrêmes (DIALLO Ibrahima, SANE Sidy 2017). La théorie des valeurs extrêmes propose d'approximer la queue d'une distribution expérimentale par une loi théorique particulière puis de réaliser des estimations à partir de cette dernière (Jenkinson A.F 1955). La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse aux valeurs exceptionnelles d'un événement et tente d'extraire une tendance ou d'estimer des quantiles extrêmes. Par définition, ces événements sont rares et éloignés du centre de la distribution (Samuel Valiquette 2020, Adrien Hitz & al 2017, Z. Yang & al 2010)

### 1.2.1 Loi généralisée des extrêmes (GEV)

La loi généralisée des extrêmes ou GEV (Generalized Extreme Value) est utilisée pour l'analyse des maxima par intervalles de temps fixes ou l'analyse des valeurs au-dessus d'un seuil.

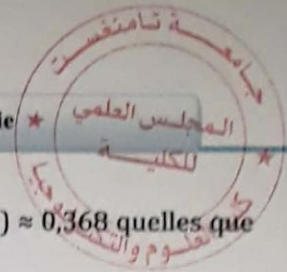
Soit  $X(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  un variable aléatoire et  $M_n$  est le max de  $X$ . S'il existe deux réels  $A \geq 0$  et  $B$  tels que

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - B}{A} \leq x\right) = F(x)$ , Le variable standard  $S = \frac{x - \mu}{\sigma}$  Avec  $\mu$  le paramètre de localisation,  $\sigma$  le paramètre de dispersion et  $\xi$  le paramètre de forme. Alor,  $F$  est l'une des types de distributions suivantes :

$$F(S, \xi) = \begin{cases} \exp(-\exp(-s)) & \text{pour } \xi = 0 \\ \exp\left(-\left(1 + \xi \cdot S\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{pour } \xi \neq 0 \text{ et } \xi \cdot S > -1 \\ 0 & \text{pour } \xi > 0 \text{ et } \xi \cdot S \leq -1 \\ 1 & \text{pour } \xi < 0 \text{ et } \xi \cdot S \leq -1 \end{cases}$$

Où  $\xi$  le paramètre de forme, peut être n'importe quel nombre réel. Ainsi pour  $\xi > 0$ , l'expression est valable pour  $S > -1/\xi$  tandis que pour  $\xi < 0$  il est valable pour  $s < -1/\xi$ . Dans le dans le premier cas,  $-1/\xi$  est le point final inférieur négatif, où  $F = 0$ ; dans le second cas,  $-1/\xi$  est l'extrémité supérieure positive, où  $F = 1$ . Pour  $\xi = 0$  la seconde expression est formellement indéfinie et est remplacée par la première expression, qui est le résultat de la prise de la limite de la seconde, là où  $\xi \rightarrow 0$ . Donc  $S$  peut être n'importe quel nombre réel.





Dans le cas particulier de la moyenne  $x = \mu$  donc  $s=0$  et  $F(s, \xi) = \exp(-1) \approx 0,368$  quelles que soient les valeurs de  $\xi$  et  $\sigma$ .

La fonction de densité de probabilité de la distribution peut s'écrire comme suit :

$$f(S, \xi) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi \cdot S)^{\frac{1}{\xi}}) & \text{pour } \xi \neq 0 \text{ et } 1 + \xi \cdot S > 0 \\ \exp(-\exp(-S)) & \text{pour } \xi = 0 \end{cases}$$

Selon la valeur de  $\xi$  on peut définir la loi généraliser les valeurs extrêmes :

- loi de Gumbel si  $\xi = 0$
- loi de Fréchet si  $\xi > 0$   $G(x) = 0$  pour  $x \leq \mu - \sigma/\xi$
- loi de Weibull négative si  $\xi < 0$   $G(x) = 1$  pour  $x \geq \mu - \sigma/\xi$

### 1.2.2 Méthode des dépassements (POT)

L'échantillon des valeurs extrêmes avec l'approche POT est généralement constitué de tous les événements qui dépassent un seuil haut approprié. À partir de l'échantillon de données, les dépassements du seuil ont la Distribution de Pareto Généralisée (GPD) comme modèle limite asymptotique (Pickands 1975 ; Alida Nadège Thiombiano 2020). La fonction de distribution cumulative (cdf) est donnée par :

$$G(S, \xi) = \begin{cases} 1 - \left[ 1 - (\xi \cdot S)^{\frac{1}{\xi}} \right] & \text{pour } (x - u) \geq 0, \xi \neq 0, \sigma > 0 \\ 1 - [\exp(-S)] & \text{pour } (x - u) \geq 0, \xi = 0, \sigma > 0 \end{cases}$$

### 1.3 Test d'Ajustement

#### 1.3.1 Test du Chi carré

Le test de Chi carré ( $\chi^2$ ) est un test statistique qui permet de tester l'adéquation d'une série de données à une famille de loi de probabilité ou de tester l'indépendance entre deux variables aléatoires.

#### a) Etapes

- 1) Trouver le degré de liberté : le degré de liberté (ddl) est calculer par suite :  $ddl = n - 1$ , tel que  $n$  : représente la taille de l'échantillon.
- 2) Choisir le risque de se tromper, c'est-à-dire de rejeter l'hypothèse nulle ( $H_0$ ), 5% est le seuil de probabilité le plus souvent choisi.
- 3) Trouver la valeur critique dans la table de distribution de  $\chi^2$ .
- 4) table de distribution de  $\chi^2$  Voir annexe 2

#### b) Exemples d'application





Afin de comparer les pressions observées au niveau des regards de la visite et les pressions théoriques les résultats sont les suivants :

Table 1.4 les valeurs de pressions observées et théoriques

	N1	N2	N3	Totale
P <sub>obs</sub>	41	16	63	120
P <sub>théo</sub>	22	27	51	100
Totale	63	43	114	220

A l'aide d'un test Chi carrée au risque 5% peut-on conclure à une déférence de pressions de deux cas ?

**Solution**

- 1) Calcule de degré de liberté
- 2) Le degré de liberté ddl est donnée par  $ddl = (3-1) * (2-1) = 2$   
Pour  $n=2$  et  $r=5\%$ , donc  $K0=5.99$  (annexe 2)
- 3) Tableau de contingence

Le tableau de contingence doit être rempli par le calcul des effectifs théoriques qui données par suite :

$$np_{ij} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n}$$

Table 1.5 Le tableau de contingence

	N1	N2	N3	Totale
Pobs	34.36	23.45	62.18	120
Pthéo	28.64	19.55	51.82	100
Totale	63	43	114	220

**1.3.2 Test de Kolmogorov-Smirnov**

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'ajustement statistique fondé sur l'hypothèse nulle (H0) de tel façon que la loi de probabilité P est générer à la même fonction de répartition F d'une loi donnée (normale, exponentielle, Gumbel,...etc.) . La fonction de répartition empirique Fb de l'échantillon doit être "proche" (en un sens qui va être précisé) de F (B. Desgraupes 2014) .

**a) Procédure :**

Au-desous, description détaillée de la procédure d'exécution du test de Kolmogorov-Smirnov

1. classer les valeurs observées par ordre croissant ;
2. calculer les nombres  $i/n$  , c'est-à-dire les valeurs supérieures de la distribution empirique ;



3. calculer les valeurs absolues des écarts  $F(X_i) - i/n$  entre  $F$  et les valeurs précédentes ;
4. calculer les nombres  $i - 1/n$ , c'est-à-dire les valeurs inférieures de la distribution empirique ;
5. calculer les valeurs absolues des écarts  $F(X_i) - i - 1/n$  entre  $F$  et les valeurs précédentes ;
6. la distance de Kolmogorov-Smirnov est le plus grand de tous ces écarts ;
7. on conclut le test en acceptant l'hypothèse  $H_0$  si la distance calculée est inférieure à la valeur critique donnée dans la table et en la rejetant sinon.

b) Exemple d'application

5 pompes à leur durée de vie en heure

Table 1.6 la durée de vie des pompes en heure

	1	2	3	4	5
Durée de vie	450	196	138	122	58

Formuler l'hypothèse test Kolmogorov-Smirnov au seuil de 5% suit une loi de probabilité exponentielle tel que La fonction de répartition de la loi exponentielle est donnée par la formule :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$$

Réponse :

$$\text{Moyen} = \frac{450 + 196 + 138 + 122 + 58}{5} = 192.8$$

$$\lambda = \frac{1}{192.8} = 0.0052$$

Les résultats constatés sont rassemblés dans le tableau suivant :

Table 1.7 Formalisation de l'hypothèse Kolmogorov-Smirnov

i	1	2	3	4	5
$x_i$	58	122	138	196	450
$F(x_i)$	0.260	0.469	0.511	0.638	0.903
$i/n$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\text{abs}(F(x_i) - i/n)$	0.060	0.069	0.089	0.162	0.097
$i - 1/n$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\text{abs}(F(x_i) - i - 1/n)$	0.260	0.269	0.111	0.038	0.103





Max = 0.269

La table de Kolmogorov-Smirnov pour  $n = 5$  au seuil  $\alpha = 0.05$  donne la valeur critique 0,565. Puisque  $0.269 < 0, 565$ , on accepte l'hypothèse  $H_0$

#### 1.4 Mise en application

##### Exercice 1

Une usine fabrique des conduites pour l'alimentation en eau potable de diamètre 200mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui en adéquation à une loi normale tel que le moyenne : 0mm, écart-type : 2.00mm. On rejette les conduites dont le diamètre n'est pas compris entre 199.97mm et 200.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

##### Solution

La probabilité qu'une conduite soit rejetée est, en notant DC le variable aléatoire «diamètre de la conduite» de tel façon que :

$$P [199.97 \leq DC \leq 200.03]$$

$$[- 0.015 \leq Z = \frac{DC - 200}{2} \leq 0.015] = F(0.015) - F(-0.015) = 0.506 - 0.494 = 0.012.$$

La proportion de conduites rejetées est donc  $p = 1.2\%$ .

##### Exercice 2

Sur un grand nombre d'échantillons de l'eau on a constaté que la répartition du taux de de métaux lourd suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre d'échantillons qu'il faut prévoir de retraitées dans une taille de 10 000 échantillons, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

##### Solution

Si X est de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$  alors  $Y = \frac{X - m}{\sigma}$  suit une loi centrée réduite.

Donc si  $P[X \leq 165]$  alors  $P[\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{165 - m}{\sigma}] = 0.56$ .

Or on peut lire dans la table de Gauss  $F(0.15) = 0.5596$ .



Max = 0.269

La table de Kolmogorov-Smirnov pour  $n = 5$  au seuil  $\alpha = 0.05$  donne la valeur critique 0,565. Puisque  $0.269 < 0,565$ , on accepte l'hypothèse  $H_0$

#### 1.4 Mise en application

##### Exercice 1

Une usine fabrique des conduites pour l'alimentation en eau potable de diamètre 200mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui en adéquation à une loi normale tel que le moyenne : 0mm, écart-type : 2.00mm. On rejette les conduites dont le diamètre n'est pas compris entre 199.97mm et 200.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

##### Solution

La probabilité qu'une conduite soit rejetée est, en notant DC le variable aléatoire «diamètre de la conduite» de tel façon que :

$$P [199.97 \leq DC \leq 200.03]$$

$$[- 0.015 \leq Z = \frac{DC - 200}{2} \leq 0.015] = F(0.015) - F(-0.015) = 0.506 - 0.494 = 0.012.$$

La proportion de conduites rejetées est donc  $p = 1.2\%$ .

##### Exercice 2

Sur un grand nombre d'échantillons de l'eau on a constaté que la répartition du taux de métaux lourds suit une loi normale avec les résultats suivants :

- 56% ont un taux inférieur à 165 cg;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre d'échantillons qu'il faut prévoir de retraitées dans une taille de 10 000 échantillons, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

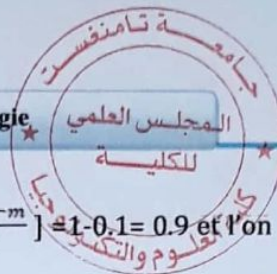
##### Solution

Si X est de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$  alors  $Y = \frac{X - m}{\sigma}$  suit une loi centrée réduite.

Donc si  $P[X \leq 165]$  alors  $P\left[\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{165 - m}{\sigma}\right] = 0.56$ .

Or on peut lire dans la table de Gauss  $F(0.15) = 0.5596$ .





De même, si  $P[X > 180]$  alors  $P\left[\frac{X-m}{\sigma} > \frac{180-m}{\sigma}\right] = 0.1$ . Donc  $P\left[\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{180-m}{\sigma}\right] = 1 - 0.1 = 0.9$  et l'on peut lire de même  $F(1.28) = 0.8997$ .

Pour trouver  $m$  et  $\sigma$  il suffit de résoudre le système d'équations :  $\frac{165-m}{\sigma} = 0.15$  et  $\frac{180-m}{\sigma} = 1.28$  d'où  $\sigma \cong 13.27$ ,  $m \cong 163$  cg. Alors,  $P[X > 182] = P\left[\frac{X-m}{\sigma} > \frac{182-163}{13.27}\right] = 1 - F(1.43) = 0.0764$ .

Donc sur 10 000 échantillons on estime le nombre d'échantillons à retraitées de l'ordre de 764 échantillons.

**Exercice 3**

Un aménagement sur un bassin versant produira des différents coefficients de frottement le long de cette cour d'eau avec une probabilité de 0,25. Cet aménagement ayant produit 5 coefficients ont donné les résultats suivants :

Table 1.8 Valeurs de coefficients de frottement

Nombre de cour d'eau	12	20	40	50 et plus
coefficients de frottement (m <sup>1/2</sup> /s)	10	18	16	6

1. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur coefficients de frottement,
2. A l'aide d'un test de  $\chi^2$  (au seuil de 5%), dire si les résultats observés permettent d'accepter l'hypothèse de l'aménagement suit la loi binomiale.

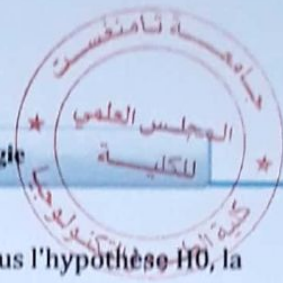
**Solution**

Il s'agit ici d'un test d'ajustement :

Posons l'hypothèse nulle H<sub>0</sub> : Les résultats sont conformes à la théorie. C'est-à-dire : H<sub>0</sub> : La variable aléatoire X suit la loi binomiale B (5; 0,25). Les probabilités puis les effectifs théoriques correspondant aux diverses valeurs de X sont représentées par le tableau suivant :

Table 1.9 les valeurs des effectifs théoriques

Nombre de cour d'eau	12	20	40	50 +	Totaux
coefficients de frottement (m <sup>1/2</sup> /s) (n <sub>i</sub> )	10	18	16	6	50
Probabilités (p <sub>i</sub> )	0,2373	0,3955	0,2637	0,1035	1
effectifs théoriques (n <sub>p<sub>i</sub></sub> )	11,87	19,78	13,18	5,17	50
n <sub>i</sub> - n <sub>p<sub>i</sub></sub>	-1,87	1,78	2,82	0,83	0



Tous les effectifs théoriques étant supérieurs à 5, on peut dire que, sous l'hypothèse  $H_0$ , la variable  $K_0$  tel que :

$$K_0 = \sum_i \sum_j \frac{(N_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}}$$

suit approximativement la loi de  $\chi^2$  à  $4-1=3$  degrés de liberté (ddl).

$$K_0 = \frac{1.87^2}{11.87} + \frac{1.78^2}{19.78} + \frac{2.82^2}{13.18} + \frac{0.83^2}{5.17} \approx 1.19$$

Pour 3 ddl on lit dans la table :  $\chi_2^{0.95} = 7.81 > K_0 = 1.19$

$k_0$  est inférieur à cette valeur donc on ne rejette pas  $H_0$





Chapitre 2 : CORRELATIONS ET ANALYSE DES DONNEES

2.1 Définitions

2.1.1 Corrélation orthogonale

Deux variables aléatoires X, Y sont orthogonales si la moyenne de leur produit est 0, c'est-à-dire :

$$E[XY]=0$$

Exemple :

Pour le bassin versant Boumassoud (N.O, Algérie) les débits de crue sont représentés dans le tableau au-dessous :

Table 2.1 les débits de crue observées et simulées du bassin versant Boumassoud

Année	QObs	Qsim
1985	14.29	19.81
1986	15.56	47.08
1987	5.96	27.27
1988	74.5	22.76
1989	33.96	24.16
1990	52.89	55.44
1991	33.88	68.41
1992	10.06	30.83
1993	7.34	19.73
1994	49.65	38.35
1995	58.32	59.96
1996	70.15	23.92
1997	14.03	30.11
1998	20.52	28.54
1999	1.55	12.26
2000	8.24	20.48
2001	31.12	41.42
2002	13.99	37.95
2003	14.25	56.10

Tester l'orthogonalité entre les débits observés et les débits simulés dans ce bassin.

Solution

Le produit E entre les débits est donnée par

$$E[Q_{obs} Q_{sim}] = \sum_{k=1}^k Q_{obs_k} \times Q_{sim_k}$$

Donc E=20293.3

Dans ce cas-là, il n'existe pas l'orthogonalité entre les débits observés et les débits simulés dans ce bassin.

2.1.2 Corrélation linéaire

Une relation est linéaire si l'on peut trouver une relation entre X et Y de la forme Y=aX+b, c'est à dire si le nuage de point peut s'ajuster correctement à une droite.

Exemple :

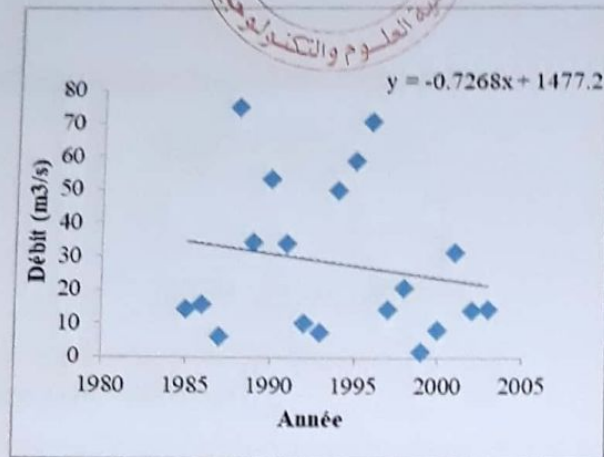
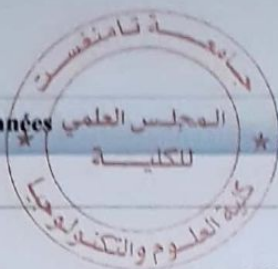


Fig2.1 Corrélation linéaire

2.2 Valeurs caractéristiques d'une série chronologique

Dans un phénomène (ex : hydrologique), une série chronologique ou chronique (parfois appeler série temporelle) une suite (Qt) d'observations chiffrées et ordonnées dans un intervalle limité de temps.

Exemples :

- Pluie moyen, max ou min (journalière, mensuel, et annuelle) ;
- Débit moyen, max ou min (journalière, mensuel, et annuelle) ;
- Température moyen, max ou min (journalière, mensuel, et annuelle) ;
- Evaporation, Evapotranspiration, ..., etc.

2.2.1 présentations d'une série chronologique

Une série chronologique est présentée soit sous la forme d'un tableau à deux colonnes, contenant np lignes

Table 2.2 Une série chronologique sous la forme d'un tableau

Année	QObs
1985	14.29
.	.
.	.
.	.
2003	14.25

Soit sous la forme d'une matrice contenant n colonnes et m lignes : 3 colonnes par (année, débit observé, débit simulé) et n lignes par (année, débit observé, débit simulé).





Table 2.2 Une série chronologique sous la forme d'une matrice

Année	QObs	Qsim
1985	14.29	19.81
.	.	.
.	.	.
.	.	.
2003	14.25	56.10

2.2.2 Graphiques d'une série chronologique.

- Graphe de la série chronologique.

On représente les débits de crue Pour le bassin versant Boumassoud (N.O, Algérie)

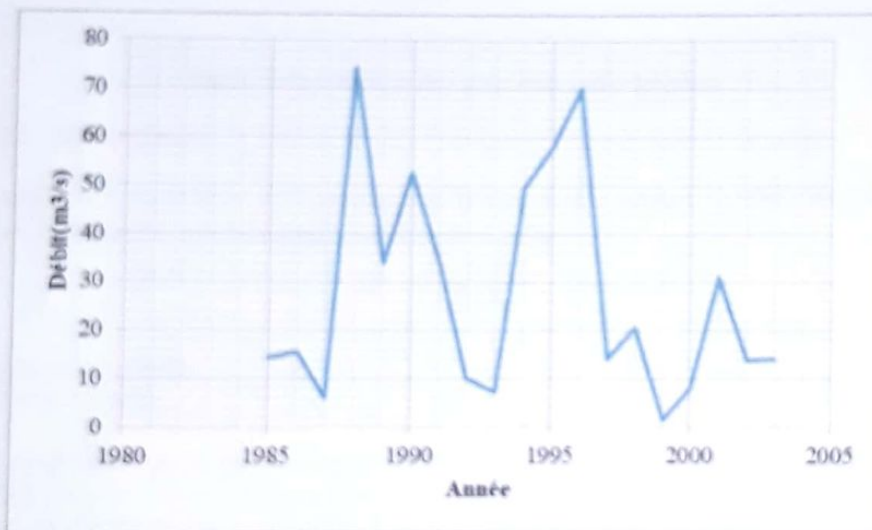


Fig2.2 l'hydrogramme de crue du bassin versant Boumassoud

- Graphiques des courbes superposées.

On représente les débits observés et les débits simulés dans un même graphe que l'on relie par le nombre d'années.. On peut ainsi comparer les valeurs de débit simulés avec les valeurs observées.

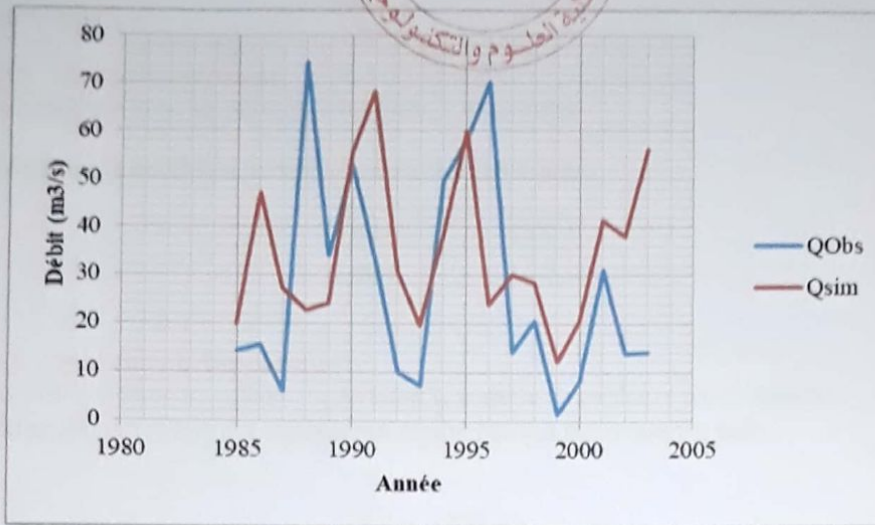
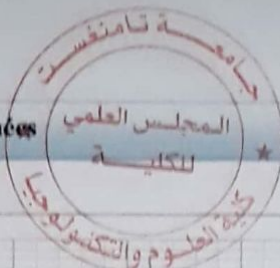


Fig2.3 Graphiques des courbes superposées.

### 2.2.3 La moyenne

La moyenne notée  $\bar{x}$  d'une série est le quotient de la somme des valeurs par l'effectif total. la moyenne est représenté mathématiquement comme suite :

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n n_i \times x_i}{\sum_1^n n_i}$$

Tel que :

- $n_i$  les valeurs d'un variable
- $x_i$  l'effectif d'un variable

Exemplpe :

On résume en général une étude statistique les débits de crue pour le bassin versant Boumassoud (N.O, Algérie) dans un tableau cité au-dessous:

Table 2.3 Les débits de crue et les effectifs pour le bassin versant Boumassoud

Année	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
QObs	14.29	15.56	5.96	74.5	33.96	52.89	33.88	10.06	7.34	49.65	58.32	70.15	14.03	20.52	1.55	8.24	31.12	13.99	14.25
Effectif	3.57	3.89	1.49	18.63	8.49	13.22	8.47	2.52	1.84	12.41	14.58	17.54	3.51	5.13	0.39	2.06	7.78	3.50	3.56

La moyenne de la série hydrométrique du bassin soit 45.5

### 2.2.4 La médiane

La médiane **Me** d'une série statistique découpe la série en deux parties de telle façon qu'au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane d'une part et la moitié des valeurs sont supérieures ou égales à la médiane d'autre part.

La médian de la série hydrométrique du bassin soit 15.56





### 2.2.5 Valeurs extrêmes

Les valeurs extrêmes sont les valeurs minimum et maximum.

Table 2.4 Les valeurs extrêmes du bassin versant Boumassoud

min	1.55
max	74.5

### 2.2.6 Moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique se calcule en divisant la somme des valeurs par le nombre d'observations. Ce paramètre est représenté mathématiquement comme suite :

$$M = \frac{\sum_1^n x}{N} = \frac{350.26}{19} = 27.9$$

### 2.2.7 Variance

Il s'agit de la moyenne des carrés des écarts. Il rend compte de l'éloignement de chaque valeur par rapport à la moyenne.

$$V = \frac{\sum_1^n (x-m)^2}{N} = \frac{9329.75}{19} = 491.03$$

### 2.2.8 Écart-type

Il s'agit de la racine carré de la variance

$$\sigma = \sqrt{V} = 22.15$$

### 2.2.9 Le coefficient de variation

Le coefficient de variation combine les paramètres de moyenne et d'écart-type et permet de comparer 2 variables de nature différente

$$CV = \frac{\sigma}{m} = \frac{22.15}{27.9} = 0.79$$

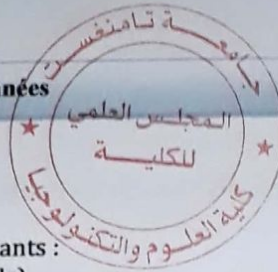
## 2.3 Test d'Homogénéité

### 2.3.1 Approche générale

Dans un bassin versant, supposons qu'on a deux échantillons de précipitation pris dans deux stations météorologiques différents. Peut-on considérer que ces deux échantillons proviennent de la même taille ou deux tailles différentes. Le principe de la comparaison consiste à poser  $H_0$ .  $H_0$  : il n'y a pas de différence significative entre les 2 séries. On procède au test au seuil de signification  $\alpha$  (ou au seuil de sécurité  $1 - \alpha$ ).

Si l'hypothèse est rejetée cela signifie que les valeurs de ces deux stations sont hétérogènes.

Si l'hypothèse est acceptée : il y'a deux explications possibles : Soit les deux séries sont formellement similaires, soit sont réellement différentes, avec une taille des échantillons insuffisante pour pouvoir mettre la différence en critique



2.4 Mise en application

Analyse statistique par Hyfran

Le model Hyfran exige les fichiers suivants :

1. La taille de l'échantillon ( taill.xls)
2. Valeurs observées ( Valeurs.xls)
3. Fichier de pas de temps (temps.xls)

a) Etapes

Ouvrez Hyfran à partir de la liste de démarrage ou d'un raccourci.

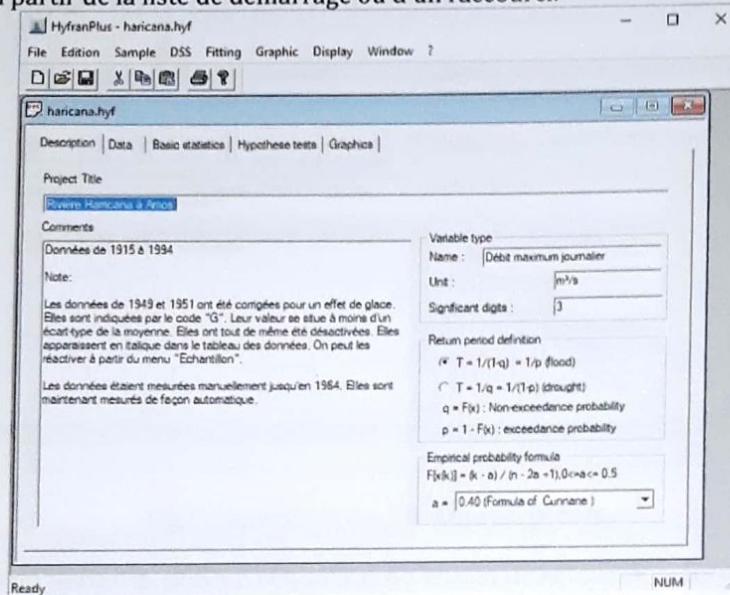


Fig 2.4 l'interface graphique de l'HYFRAN

Créer un projet en utilisant File/New/

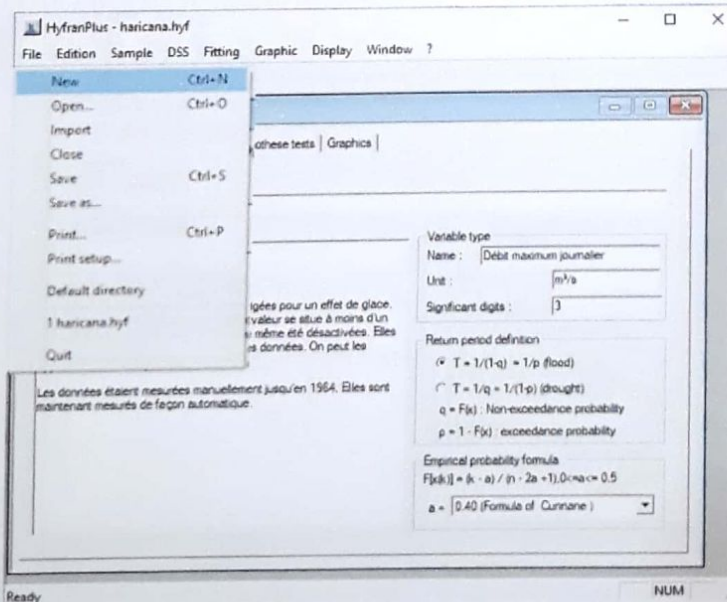


Fig2.5 création d'un projet





Spécifiez le nom du projet et la situation (ex : Bassin Boumassoud)

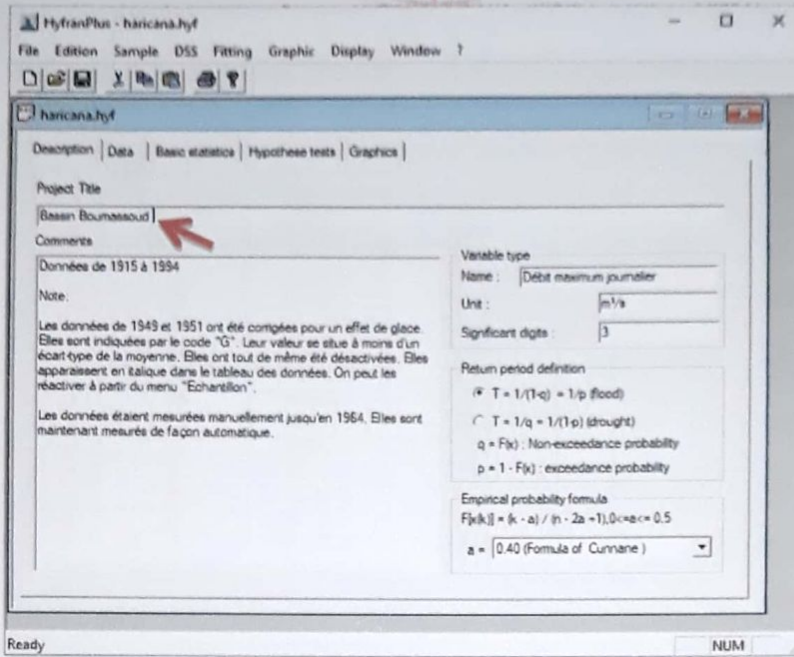


Fig2.6 Spécification du nom du projet

Spécifiez le type de variable, définir l'équation du temps de retour et la formule empirique de probabilité

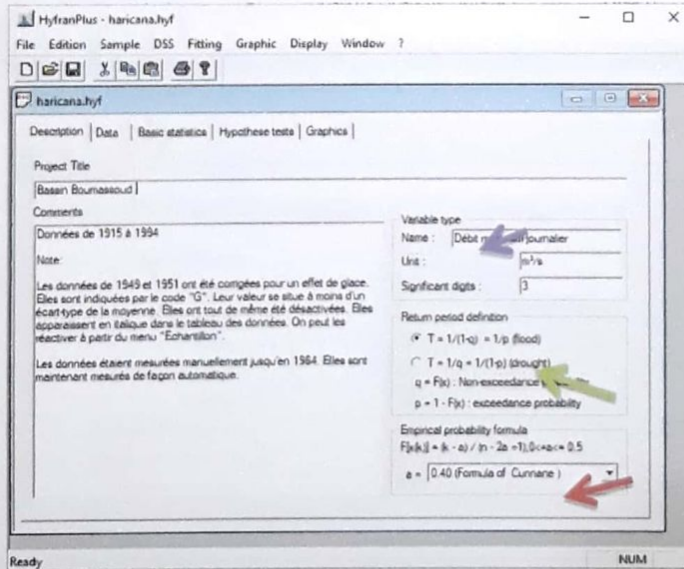


Fig2.7 Spécification de type d'un variable



Insérer votre donnée en utilisant /Data

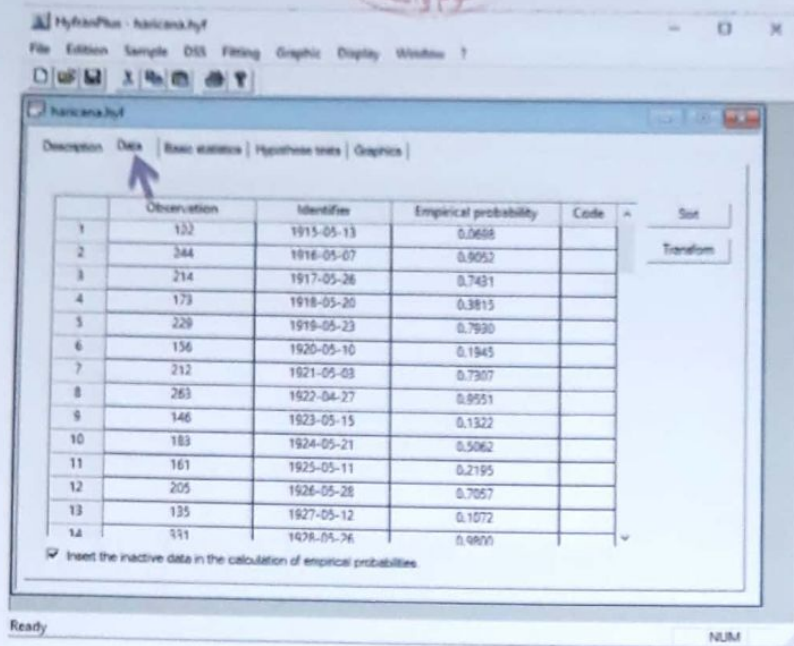


Fig2.8 l'insertion des données

Cliquer sur /Basic statistics pour connaître les paramètres statistiques (max, min, moyen,...etc)

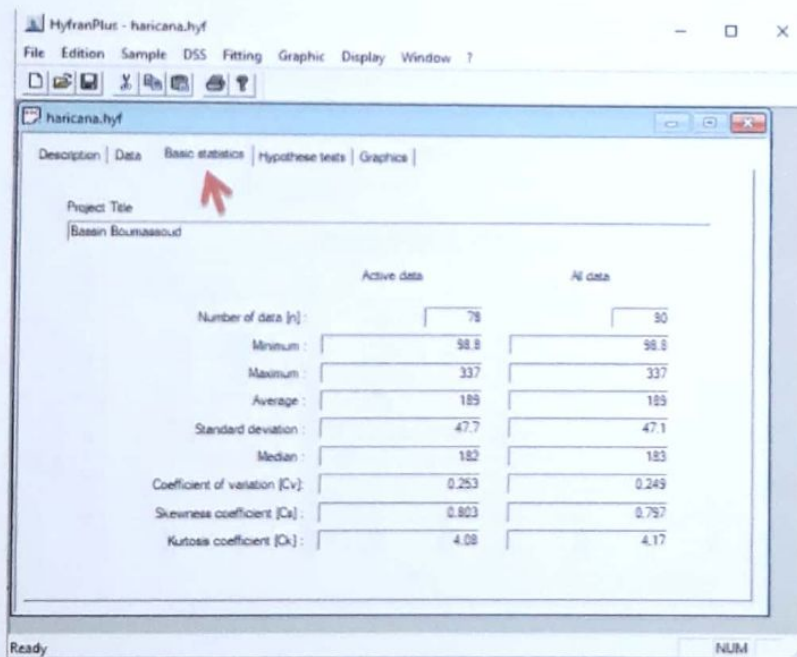


Fig2.9 les paramètres statistiques





Cliquer sur /Hypothese tests pour spécifier le type de l'hypothèse de teste

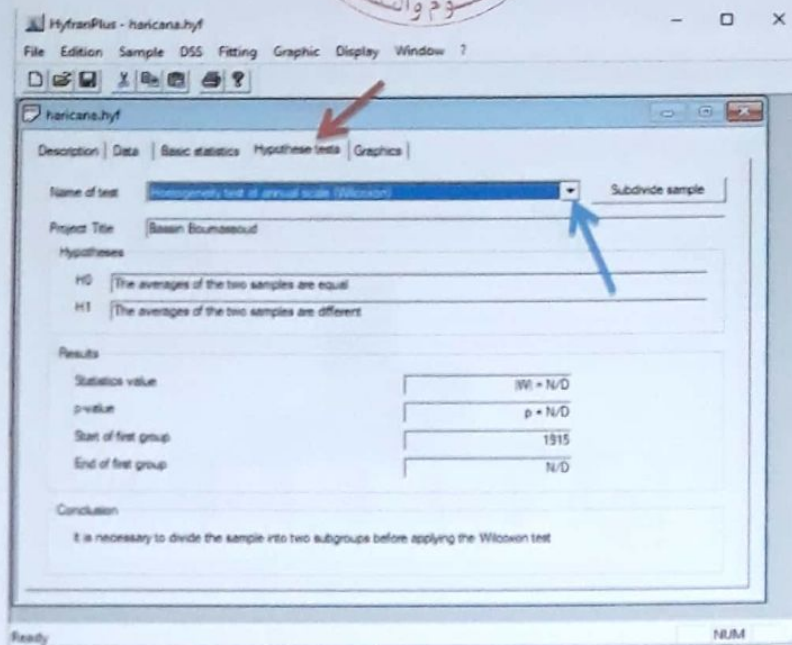


Fig2.10 type de l'hypothèse de teste

Présenter graphiquement votre données en utilisant/Graphics

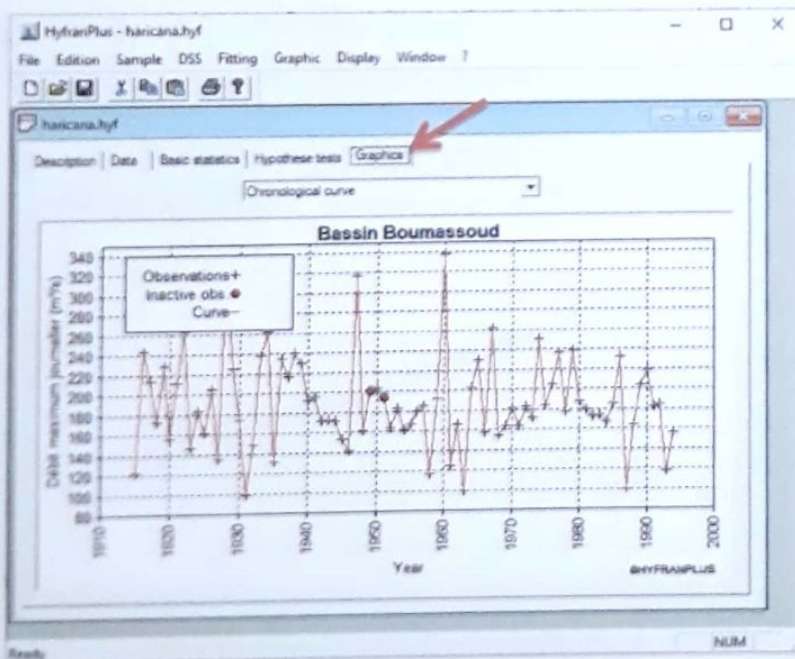


Fig2.11 représentation graphiquement des données



Changer le type de graphe (chronologique, histogramme, etc)

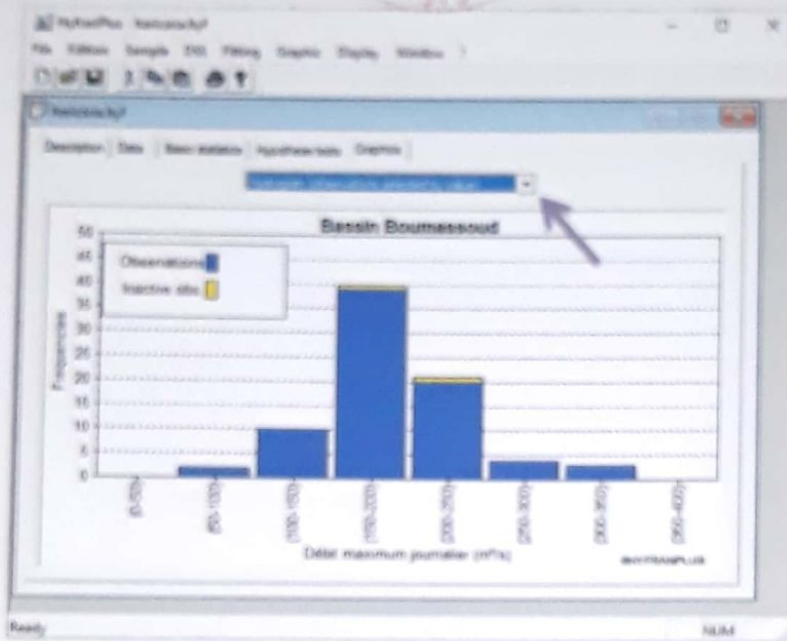


Fig2.12 Changement de type de graphe

L'ajustement d'une distribution (ex : log-normale) à la série en utilisant Fitting/lognormal  
 Les résultats sont représentés graphiquement

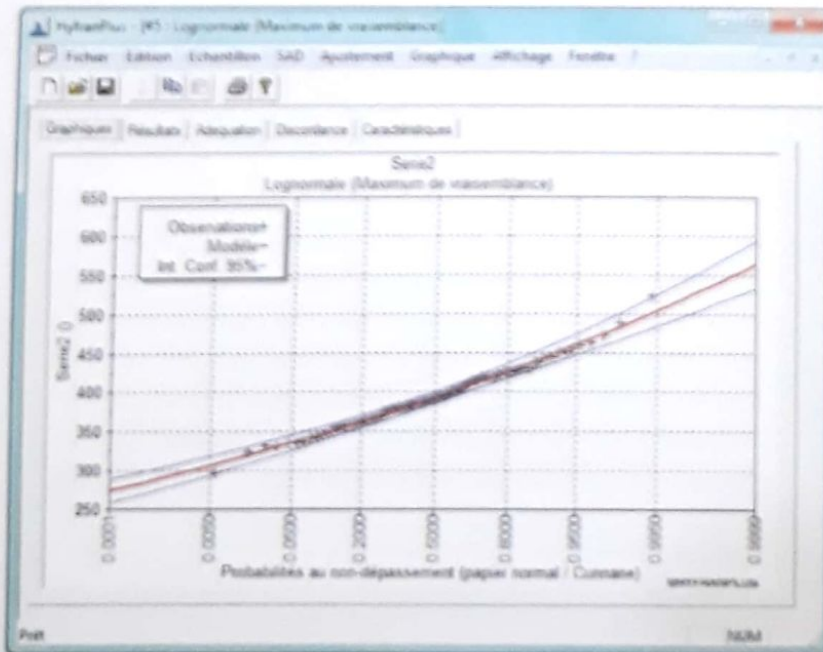
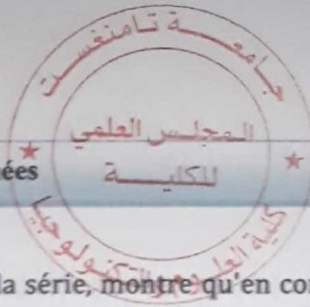


Fig2.13 L'ajustement d'une distribution





## Chapitre 2. Corrélations et analyse des données

L'application du test de discordance, à la série, montre qu'en considérant l'ensemble de la série, le test ne permet pas de conclure sur la log-normalité de l'ensemble de la série et ne peut donc pas confirmer si la plus grande observation appartient au log- normale (ou bien d'autre test choisi). En effet, dans ce cas on sait seulement que la **p-value** de la statistique **t** est inférieure à une valeur donnée ; mais elle peut alors être supérieure ou inférieure à la valeur critique (ex : 5%).

### Chapitre 3 : MODELISATION HYDROLOGIQUE

#### 3.1) La modélisation hydrologique

Compte tenu de l'utilisation toujours plus intense des ressources en eau, la modélisation hydrologique est l'un des aspects les plus importants de l'hydrologie appliquée. Elle intervient nécessairement pour le contrôle des inondations, la régularisation des cours d'eau, la production hydro-électrique, le dimensionnement des ouvrages hydrauliques ainsi que pour le contrôle de la pollution. Pour répondre de façon adéquate à ces besoins, les hydrologues ont développé des outils que l'on appelle « modèles hydrologiques ». Ces modèles ont évolué très rapidement depuis quelques décades avec l'avènement des ordinateurs de plus en plus puissants.

#### 3.2) Quelques éléments vocabulaires

##### 3.2.1) Définition du bassin versant

Le bassin versant représente, en principe, l'unité géographique sur laquelle se base l'analyse du cycle hydrologique et ses effets. Plus précisément, le bassin versant qui peut être considéré comme un « système » est une surface élémentaire hydrologiquement close, c'est-à-dire qu'aucun écoulement n'y pénètre de l'extérieur et que tous les excédents de précipitations s'évaporent ou s'écoulent par une seule section à l'exutoire. Le bassin versant en une section droite d'un cours d'eau, est donc défini comme la totalité de la surface topographique drainée par ce cours d'eau et ses affluents à l'amont de cette section. Il est entièrement caractérisé par son exutoire, à partir duquel nous pouvons tracer le point de départ et d'arrivée de la ligne de partage des eaux qui le délimite (MUSY.A,2005)

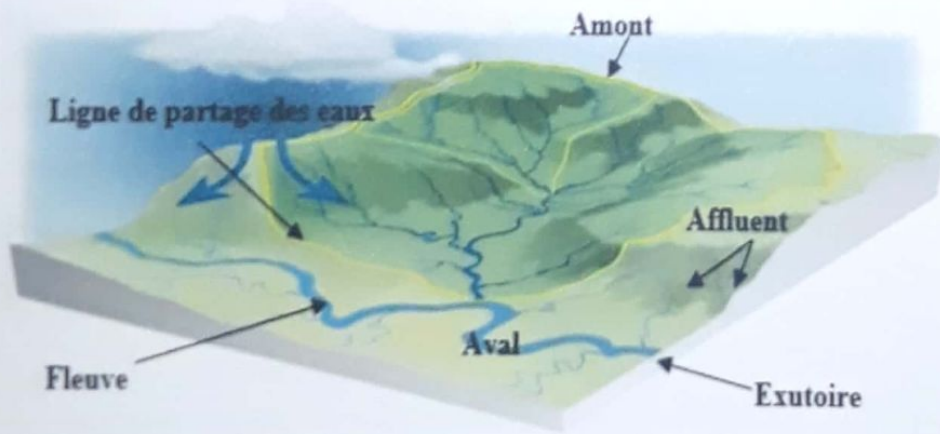


Fig.3.1. Schématisation d'un bassin versant topographique (SIAG)





### 3.2.2) Comportement hydrologique des bassins versants

L'analyse du comportement hydrologique d'un bassin versant s'effectue le plus souvent par le biais de l'étude de la réaction hydrologique du bassin face à une précipitation. Cette réaction est mesurée par l'observation de la quantité d'eau qui s'écoule à l'exutoire du système. La représentation graphique de l'évolution du débit  $Q$  en fonction du temps  $T$  constitue un Hydrogramme de crue. La réaction du bassin versant peut également être représentée par un Limnigramme qui n'est que la représentation de la hauteur d'eau mesurée en fonction du temps. La réaction hydrologique d'un bassin versant à une sollicitation particulière est caractérisée par sa vitesse et son intensité. Ces deux caractéristiques sont fonction du type et de l'intensité de la précipitation qui le sollicite mais aussi d'une variable caractérisant l'état du bassin versant qui est le temps de concentration des eaux sur le bassin (MUSY.A,2005).

### 3.2.3) Définition des modèles hydrologiques

Pour un phénomène donné que ce soit physique, chimique, biologique ou bien hydraulique, le modèle joue un rôle très important pour trouver une représentation schématique de ce phénomène grâce à un ensemble de relations mathématiques. Les modèles sont le principal moyen pour gérer la complexité des systèmes dont ils offrent une représentation abstraite et simplifiée, où seuls les détails utiles permettant de modéliser une tâche donnée du système sont gardés. Les modèles hydrologiques permettent donc de transformer des séries décrivant le climat d'un bassin versant (précipitation et températures) parfois appelées données en une série de débits parfois appelés résultats. Cette transformation est souvent divisée en deux parties:

#### a. Fonction de production

La fonction de production consiste à déterminer le bilan d'eau à l'échelle du bassin versant. Ce bilan permet de répartir la pluie " brute " observée en pluie "nette", en quantité d'eau évapotranspirée et en quantité d'eau stockée par le bassin versant. Dans une fonction de production, cinq paramètres sont traités :

- Transpiration de la végétation ;
- L'évaporation du sol ;
- L'infiltration de l'eau dans le sol ;
- La percolation de l'eau le long du profil de sol ;
- La recharge profonde qui alimente les nappes souterraines.

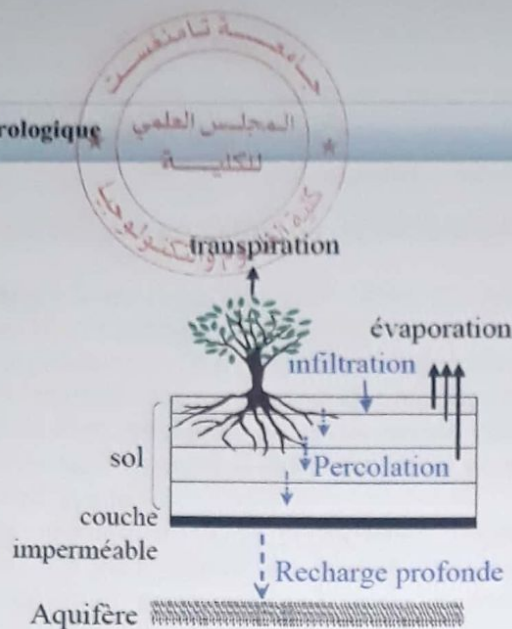


Fig.3.2. Schématisation des paramètres de la fonction de production

**b. Fonction de transfert**

Une deuxième partie souvent appelé le "**transfert**" ou "le routage", qui consiste à répartir dans le temps la quantité d'eau participant aux débits du bassin versant étudié. Plusieurs méthodes existent pour déterminer la fonction de transfert d'un bassin. Les plus complexes utilisent les équations de Barre Saint Venant avec les méthodes d'onde diffusante ou d'onde cinématique. Les plus simples utilisent la distance de chaque point de la grille à l'exutoire et affectent une vitesse (CARINA.,2008).

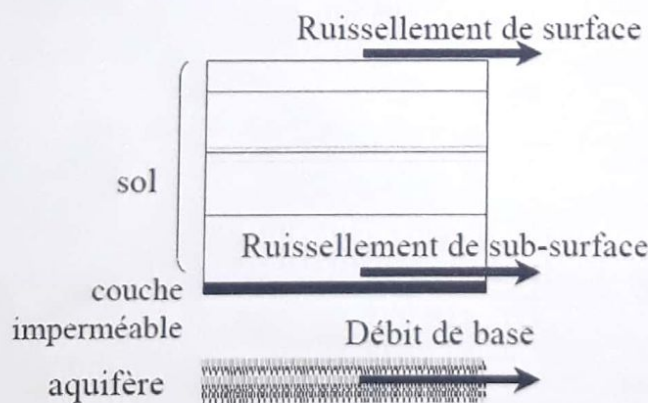


Fig.3.3. Schématisation des paramètres de la fonction de transfert

**3.2.4) Construction d'un modèle hydrologique**

Généralement, un modèle hydrologique est construit par 5 paramètres importants (Fig.3.4) :

- a) **Paramètres d'entrée** : sont des séries décrivant le climat d'un bassin versant (précipitation, ETP et températures ...etc.).





- b) **Paramètres de sortie** : sont généralement les débits modélisés à l'exutoire du bassin versant
- c) **Paramètres d'état** : à un moment donné, l'état de système est évolué par les variables internes d'un modèle hydrologique. Pratiquement, ces variables peuvent être la fonction de production, l'opérateur d'un algorithme d'optimisation, ..., etc.
- d) **Paramètres d'un modèle** : les paramètres des modèles hydrologiques, qu'ils aient une pseudo-signification physique ou qu'ils soient calés, servent à adapter la paramétrisation des lois régissant le fonctionnement du modèle, au bassin versant étudié (MATHEVET.T, 2005).
- e) **La performance** : généralement, la performance permet d'estimer la fonction objective (erreur). La performance un modèle hydrologique est validé par les indicateurs statistiques de performance : L'erreur moyenne des carrés MSE (Mean Square Error), le coefficient d'efficacité de Nash-Sutcliffe NSC (Nash-Sutcliffe coefficient of efficiency), l'erreur root- moyenne-carrée- RMSE (Root-Mean-Square Error) et l'Erreur de pourcentage absolue moyenne MAPE (Mean Absolute Percentage Error).

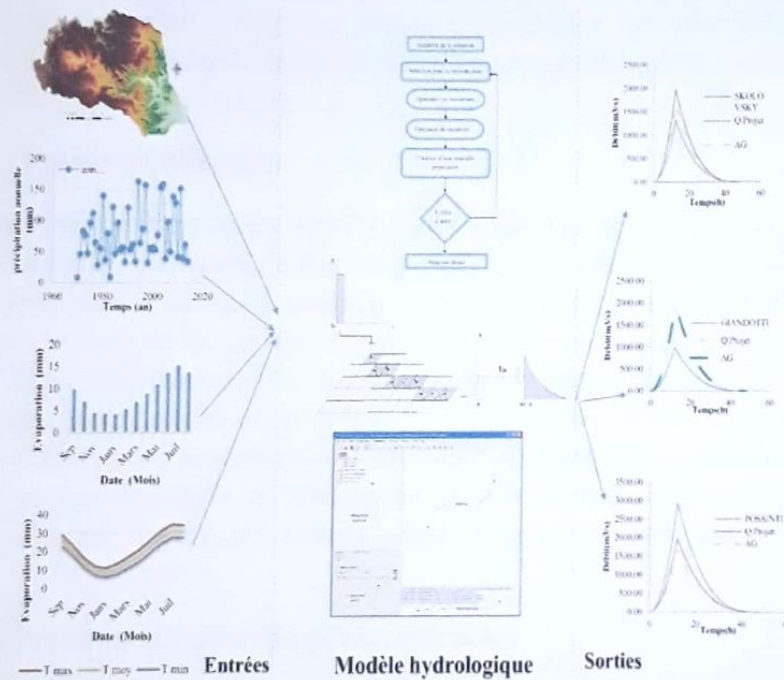
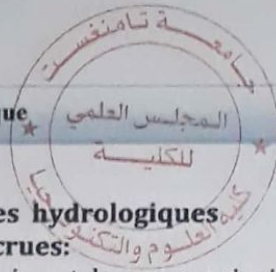


Fig.3.4. Représentation du fonctionnement d'un modèle hydrologique



### 3.3) Pourquoi des modèles hydrologiques

#### 3.3.1) Prévision de crues:

La forte accumulation de pluie est la cause principale des inondations. Une forte pluie amène un grand volume d'eau dans un bassin hydrographique ce qui peut augmenter le débit du cours d'eau. De plus, pour mieux anticiper la variation du niveau des eaux, il faut connaître l'état préalable de saturation des sols et surtout les quantités d'eau qui s'ajouteront durant les jours suivants. En effet, l'eau qui tombe dans un bassin hydrographique prend un certain temps à s'écouler, selon le type de terrain et la pente. Durant cette période, les quantités qui s'ajouteront affecteront le ruissellement. A ce titre, une méthode appliquée pour déterminer la variation de la quantité d'eau en fonction du temps appelé « la prévision ». La prévision des crues est la modélisation des quantités de précipitations, solides ou liquides, reçues dans un bassin hydrographique et de leur effet sur l'écoulement dans les cours d'eau. Les hydrologues utilisent des modèles de prévision numérique du temps pour estimer la quantité de pluie ou neige qui devraient tomber, et le débit des rivières et utilisent des programmes de modélisation des crues pour prévoir les débordements et tenter de limiter les dégâts d'inondation aux riverains. Ces systèmes servent aussi souvent à contrôler les systèmes d'égouts pluviaux, le niveau des barrages et les canaux de dérivations des crues.

#### 3.3.2) Prévision d'étiages

La prévision d'étiage à long terme est l'une des questions émergentes en hydrologie en raison de la demande croissante en eau en période sèche. Des prévisions fiables de débits de longue de quelques semaines à quelques mois à l'avance, peuvent améliorer la gestion des ressources en eau et de ce fait l'économie de la société et les conditions de vie aquatique (PUSHPALATHA.R,2013). En hydrologie, l'étiage correspond sur plusieurs années à la période de l'année où le niveau d'un cours d'eau atteint son point le plus bas (basses eaux). Cette valeur est annuelle. Il intervient pendant une période de tarissement et est dû à une sécheresse forte et prolongée qui peut être fortement aggravée par des températures élevées favorisant l'évaporation, et par les pompages agricoles à fin d'irrigation.

#### 3.3.3) Prédétermination de débits extrêmes

L'application des différentes méthodes de prédétermination des pluies et des débits peut conduire à des estimations parfois très différentes du risque hydrologique en un site donné, Si l'on s'intéresse aux crues, il se trouve que le débit est le résultat des interactions des précipitations et du sol. Sa modélisation se fait par des méthodes statistiques, conceptuelles et déterministes. Et pour chaque méthode, la pluie est une donnée importante pour la modélisation des débits. En effet, les études hydrologiques réalisées pour la prévention du risque d'inondation ou la proposition d'un aménagement ou



dimensionnement d'ouvrages hydrauliques couvrent une large gamme de méthodologies. Elles visent à déterminer des valeurs de référence de pluie ou de crue extrême, associées à une période de retour  $T$  donnée ou à un maximum connu. L'estimation des pluies extrêmes permet la localisation des risques, ainsi que leur répartition spatiale (extension spatiale du risque). Plusieurs recherches ont pour objet d'étudier le processus de génération des précipitations et des débits. Parmi ces recherches nous ne citons que la modélisation qui est la méthode utilisée dans notre travail. La théorie des valeurs extrêmes (EMBRECHTS et al., 1997, COLES.S, 2001), fondée sur des résultats de la théorie des probabilités, permet d'obtenir un cadre mathématique pour l'estimation des probabilités de valeurs rares à extrêmes de pluie et de débit.

### 3.3.4) Études d'impact anthropique sur l'hydrologie

toujours en hydrologie, le mot anthropique correspondant essentiellement à l'intervention de l'homme sur un paysage, sol ou relief pour objet de réaliser une proposition d'aménagement sur les oueds ou bien sur les cotes amont des bassins versant afin de protéger les agglomérations contre les risques causés par l'enlèvement de niveau de l'eau en cas de crues. Ces changements affectent directement sur le comportement hydrologique des bassins. À ce titre, les hydrologues proposent l'application des modèles pour estimer les différents facteurs qui influent sur la variation de la relation pluie - débit.

### 3.4) Différents types des modèles hydrologiques

Il existe de nombreux modèles pour l'étude et modélisation du comportement hydrologique des bassins versant avec une spécificité et domaine d'application pour chaque modèle. Après le choix du modèle, il faut avoir l'évaluation de sa capacité à représenter la réalité afin de valider la performance du modèle et vérifier la superposition des résultats simulés par rapport à l'observation. Le premier modèle hydrologique était dû à Perreault en 1674. Il était annuel, global sur le bassin versant de la Seine à Paris. Il annonçait que l'écoulement correspondait au sixième de la pluie. Depuis, la modélisation hydrologique s'est largement développée et l'on peut différencier les modèles disponibles selon le type d'approche utilisé pour représenter le cycle hydrologique (CHKIR.N, 1994). Selon Singh en 1995 et Payraudeau en 2002, le choix d'un type de modèle repose principalement sur la représentation de l'espace, du temps et des processus décrits. Donc les différences portent notamment sur les options de simulation en termes de discrétisation spatiale: les modèles sont globaux ou distribués. Les différences de représentation temporelle mènent à l'existence de modèles continus ou événementiels. Et enfin, ils diffèrent au point de vue de l'expression des phénomènes hydrologiques, liés soit à des équations empiriques, soit à des équations physiques, soit à une simplification plus ou moins poussée de ces équations physiques: les modèles sont empiriques ou conceptuels. Cependant, certaines classifications distinguent encore les modèles déterministes ou stochastiques, les modèles cinématiques ou dynamiques, les modèles de prédiction, gestion ou aménagement.

Nous avons repris la classification de Gume (2007), qui résume en deux grands groupes les différentes autres classifications existant dans la littérature, les différents modèles sont représentés dans la figure au-dessous.

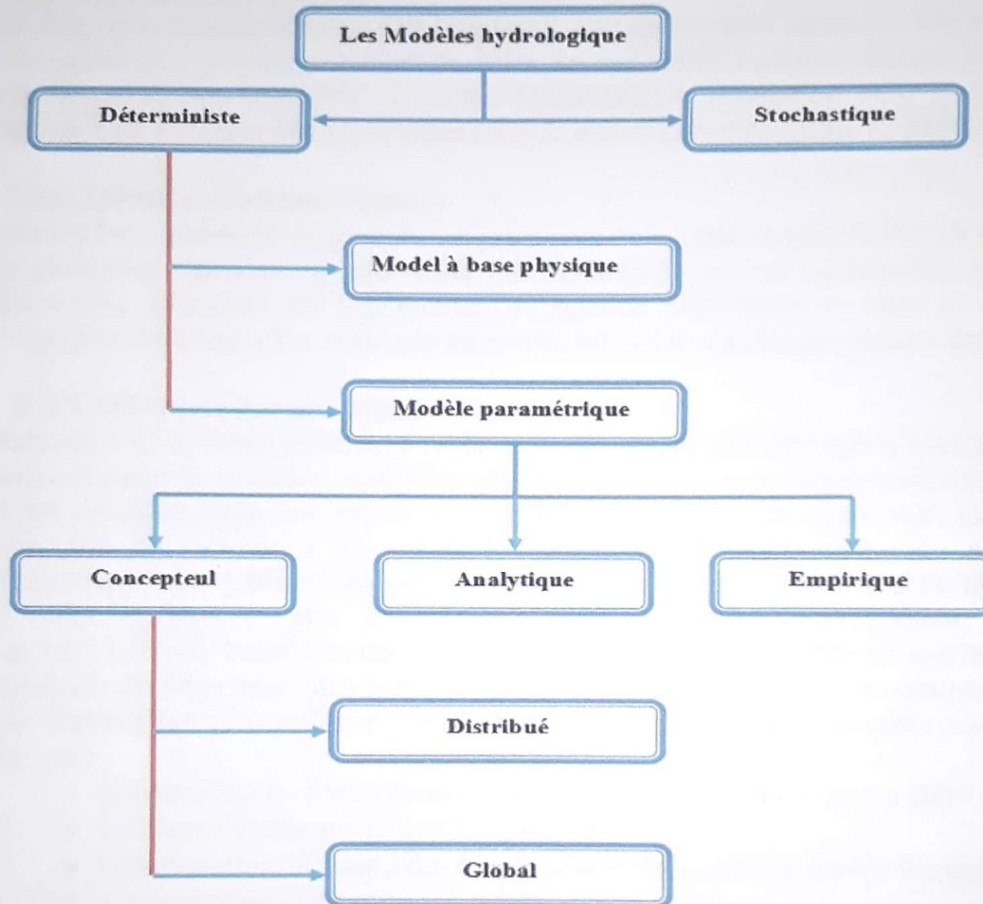


Fig.3.5. Les Modèles hydrologiques

### 3.4.1) Modèles Stochastiques

L'hydrologie stochastique est conçue comme la partie de l'hydrologie générale qui traite les processus aléatoires de l'hydrologie et lequel les composants aléatoires ne devraient pas être négligés de telles façons que chaque modèle stochastique contient habituellement une ou plusieurs composantes indépendantes. De tous les problèmes rencontrés dans l'hydrologie stochastique quatre points habituellement très importants dans la pratique:

- L'extraction d'information à partir de données disponibles;
- Transfert de l'information d'un endroit à placer ou de variable par variable;
- Description condensée des processus aux fins de leur simulation dans la forme d'échantillons;



- La prévision de l'événement par la création des nouvelles sorties. (YEVJEVIEH.V,1987).

Le modèle stochastique basée sur le concept que la variable d'intérêt est représenté par la variabilité et l'incertitude dans et la sortie représente la fonction de distribution de probabilité. (GLIŃSKI.J et al,2011).

### 3.4.2) Modèles Déterministes

Une modélisation déterministe ne fait intervenir aucune variable aléatoire. Les relations entre variables sont strictement fonctionnelles. La variabilité (système fluctue pour une cause inconnue ou non contrôlée) n'est pas modélisée par simulation. Pour les modèles déterministes on distingue plusieurs types selon la classification de Gume en 2007 tel que:

#### 3.4.2.1) Modèles à Base physique

Un modèle à base physique représente les processus de la relation pluie-débit en utilisant les lois physiques régissant ces processus. Les modèles de surface continentale sont des modèles à base physique qui représentent la relation pluie-débit. Ce type de modèle permet de plus, de calculer les différents termes du bilan d'eau du bassin versant étudié.

#### 3.4.2.2) Modèle Paramétrique

L'identification de système consiste à rechercher un modèle mathématique d'un système dynamique à partir de données expérimentales et de connaissances disponibles a priori. Ce modèle est caractérisé par une structure et par des paramètres qu'il convient de choisir et d'ajuster, afin de reproduire au mieux le comportement entrée-sortie du système. (GARNIER.H et al ,2007). Un modèle paramétrique c'est un modèle dans lequel les temps de survie sont supposés être distribués selon une loi parfaitement connu (BERCHTOLD.A,2014). Traditionnellement, les méthodes d'indentification de système sont employées afin de déterminer des modèles permettant la synthèse de lois de commande. Ce domaine d'utilisation conventionnel n'est toutefois pas le seul et les méthodes sont aussi utilisées pour :

- L'estimation de paramètres à physiques non directement mesurables ;
- Le diagnostic de systèmes à base de modèle ;
- La simulation, utilisée à des fins de conception, de prévision ou formation ;
- L'interprétation d'essais. (GARNIER.H et al, 2007).

Pour bien définir les modèles paramétriques on distingue :

#### a) Modèle Empirique

De nombreux outils de prévision sont des modèles empiriques basées sur une représentation très schématique du fonctionnement d'un bassin versant ou d'une rivière. Certains sont même des objets totalement « déconnectés » de la physique des écoulements, comme peuvent l'être des relations de régression (ex : des relations linéaires ou des réseaux de neurones artificielles). En modélisation hydrologique, un modèle empirique est construit autour de relations mathématiques directes établies entre les entrées et les sorties observées sur le bassin versant considéré. Ce type de modèle ne cherche pas à décrire les processus impliqués dans la relation pluie-débit et est donc souvent caractérisé comme des modèles "boîtes noires ".C'est-à-dire une représentation d'un système sans considérer son fonctionnement interne, que ce soit un objet mécanique ou électronique, un



organisme, une personne, un mode d'organisation sociale, un bassin versant, ou n'importe quel autre système. Il s'agit généralement de modèles globaux.

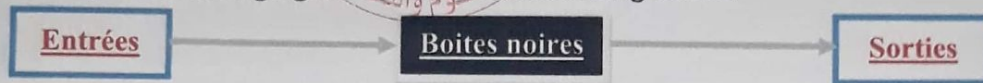


Fig.3.6. Schématisation d'un modèle Boite noir

### b) Modèle Analytique

Modèle pour lequel les relations entre les variables de sortie et les variables de forçage ont été établies par analyse de séries de données. L'exemple type est celui des modèles linéaires : les paramètres des modèles sont liés aux coefficients de corrélation entre les variables. Notons que l'analyse des données peut conduire au choix de relations non linéaires entre les variables. (GAUME.E,2000)

### c) Modèle Conceptuel

Modèle dans lequel le fonctionnement du bassin versant est représenté par des analogies : concepts. L'analogie la plus souvent utilisée pour représenter le fonctionnement des sols et des nappes est celle du réservoir dont le débit de vidange dépend du taux de remplissage (GAUME.E,2000). Parmi les modèles hydrologiques conceptuels utilisées pour la modélisation de la relation pluie-débit nous avons Le modèles CEQUEAU qui est le parfait exemple. Les modèles conceptuels sont divisés par deux familles :

#### ❖ Modèle Conceptuel Distribué

Les modèles pluie-débit sont dit distribués géographiquement s'ils tiennent compte de la spatialisation des phénomènes, c'est-à-dire quand leurs fonctions de production et de transfert ne sont pas homogènes sur tout le bassin versant. Cette catégorie inclut des modèles empirique, conceptuels et à base physique. Bien qu'un modèle distribué soit susceptible de fonctionner de manière optimale avec, en forçage d'entrée, un champ de pluie, il peut être également utilisé avec une pluie moyennée sur le bassin.

#### ❖ Modèle Conceptuel Globale :

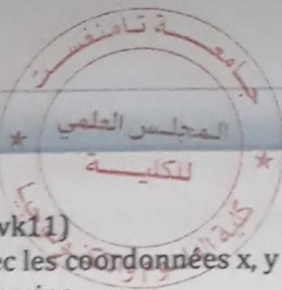
Les modèles globaux sont conçus pour pouvoir traiter efficacement des problèmes où la fonction à optimiser est multi-modale. Les méthodes globales, par opposition aux locales, explorent une partie beaucoup plus grande de l'espace des paramètres. Les modèles globaux offrent à l'utilisateur un choix très attractif, car il présente une structure très simplifiée, il ne demande pas trop de données, faciles à utiliser et à calibrer. La représentation du processus hydrologique est très simplifiée. Il peut souvent mener à des résultats satisfaisants, et spécialement si l'objectif majeur est la prévision d'une crue. Un exemple de ce type de modèle est le IHRACRES (CHARLES.P,2000).

### 3.5) Applications

#### 3.5.1) modélisation hydrologique par Mike 11

Le model Mike 11 exige les fichiers suivants :





- 1) Fichier réseau fluvial (.nwk11)  
Vue en plan du bassin avec les coordonnées x, y  
Liaisons entre les sous-bassins
  - 2) Coupes du bassin (.xns11)  
Données de section du bassin avec élévation(MNT)  
Au moins deux sections transversales sont nécessaires pour chaque sous-bassin
  - 3) Données de séries temporelles (.dfs0)  
Stocke toutes les données de séries chronologiques(pluviométriques et hydrométriques)  
Également des séries chronologiques de concentration de polluants dans le cas du modèle de qualité de l'eau.
  - 4) Données de limite (.bnd11)
  - 5) Paramètre HD (.HD11)
  - 6) Paramètre AD (.AD11)
  - 7) Contrôle de simulation (.sim11)
  - 8) Vue MIKE
- a) Etapes
- Ouvrez MIKE Zero à partir de la liste de démarrage ou d'un raccourci.

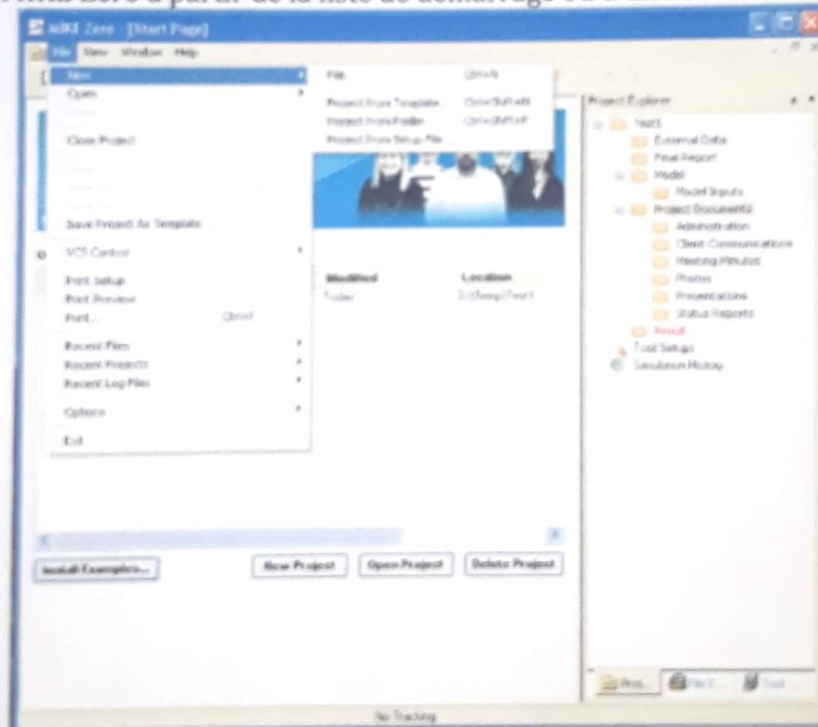
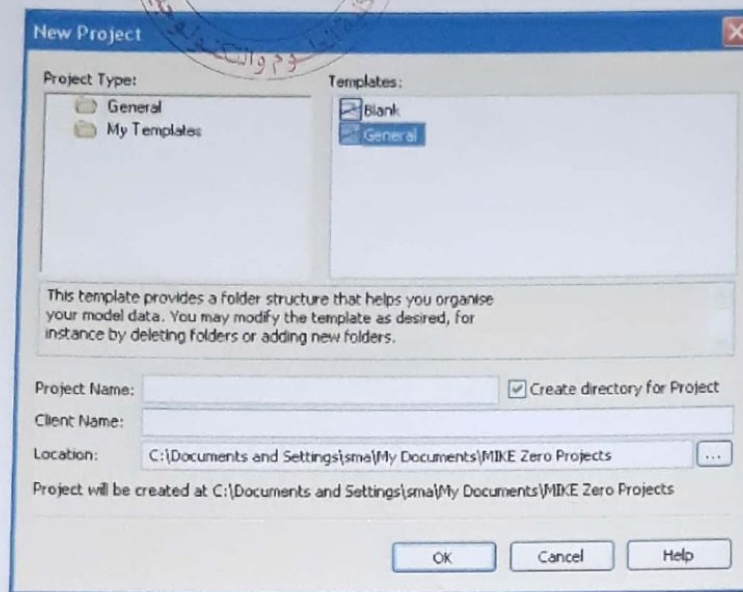


Fig3.7 l'interface graphique de MIKE Zero

- Créer un projet en utilisant File/New/Project from Template
- Spécifiez le nom du projet et la situation (Il crée un dossier avec le projet un nom et un projet fichier avec .mzp prolongement dans le dossier).
- Utilisation de File/New/File menu, vous pouvez ouvrir différents éditeurs de fichiers pour construire votre modèle. Enregistrez ces fichiers dans l'un des dossiers dans le cadre du projet dossier.



**Fig 3.8 Création d'un nouveau projet pour MIKE Zero**

Exemple : Dans un bassin, les données topographiques sont citées comme suite :  
Table 3.1 les données topographiques

Section	point	x	z
M-1	1	0	6
	2	1.5	0
	3	6.5	0
	4	8	6
M-2	1	0	8
	2	2	0
	3	9	0
	4	11	8
M-3	1	0	8
	2	13	0
	3	12	0
	4	15	8
B-1	1	0	3
	2	1	0
	3	3	0
	4	4	3
B-2	1	0	4
	2	1	0
	3	3	0
	4	4	4



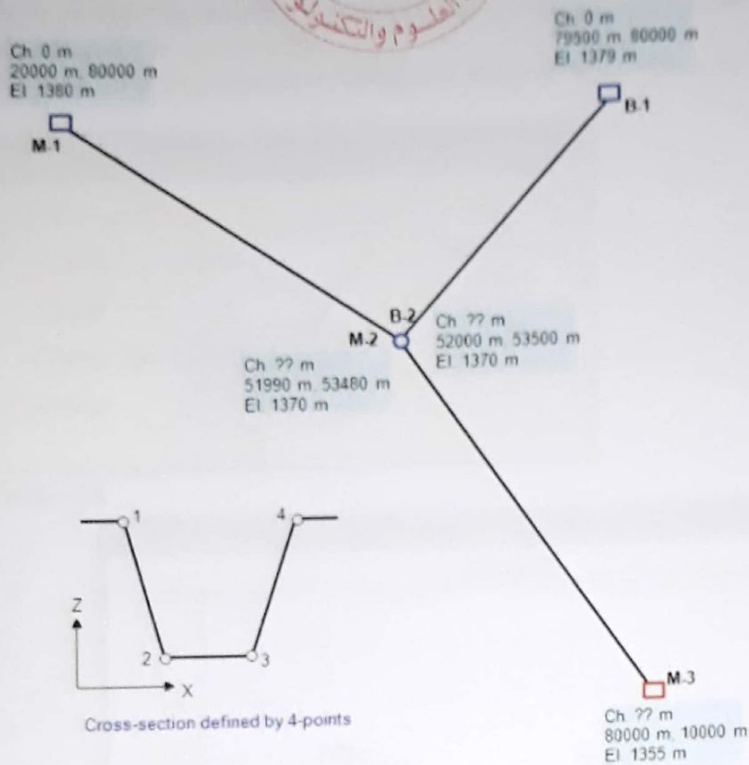


Fig3.9 Création d'un réseau hydrographique pour MIKE Zero

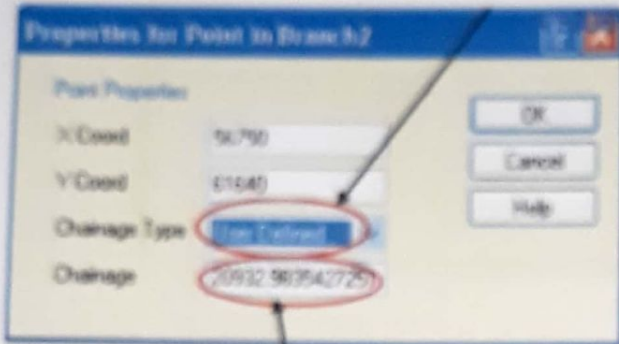
**Éditeur de réseau hydrographique :**

- Ouvrez MIKE Zéro
- Ouvrir l'éditeur de réseau hydrographique
- File/New/Mike11/River Network (.nwk11)
- Spécifiez la plage de grille et la projection
- Dessinez un réseau (utilisez "add", "remove", "move", etc)



Sélectionnez cette icône pour ajouter le bassin. Cliquez ensuite en amont du bassin ; puis cliquez sur des points successifs en aval. Double-cliquez à l'extrémité aval du bassin.

- Pour corriger les valeurs x, y, sélectionnez le point, faites un clic droit et sélectionnez les propriétés.
- Dans la boîte de propriétés, définissez «user defined» pour modifier les valeurs x-y.



- Cliquer OK

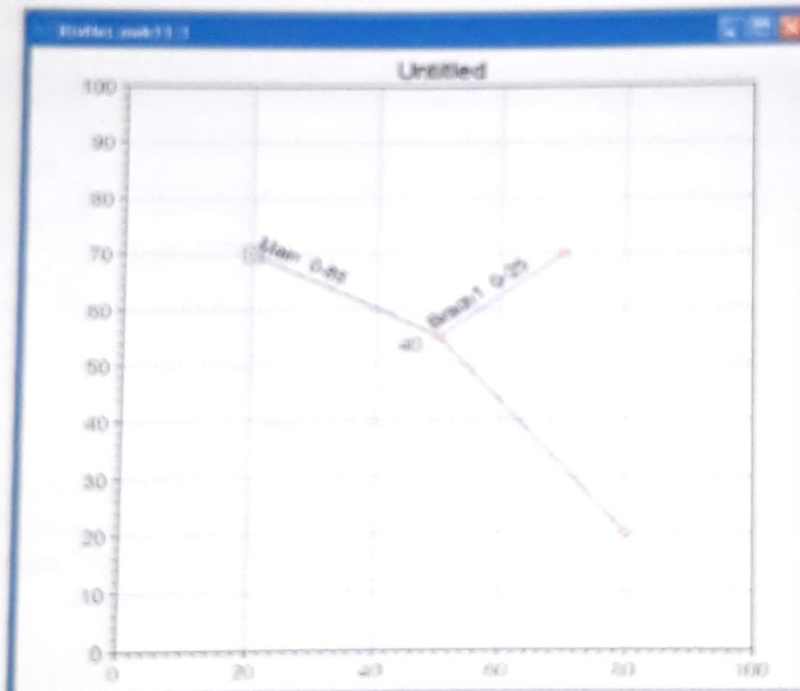


Fig 3.10 visualisation d'un réseau hydrographique

- Ouvrez la vue tabulaire en sélectionnant : View/Tabular View/Network
- Voir les détails des points et des intersections
- Nommer les embranchements du bassin ; nom TopoID ; définir des connexions
- Utilisez « Tab » dans le tableau Aperçu pour ajouter de nouveaux points (si nécessaire).



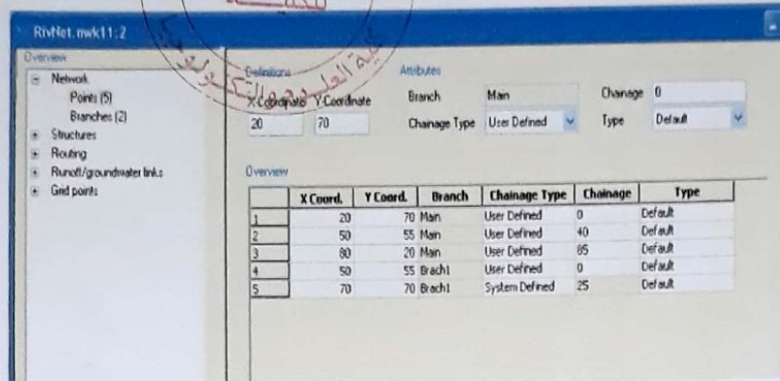


Fig 3.11 vérification des données

- Cliquez sur « Branches » pour afficher les détails de la succursale.
- Utilisez « Tab » dans le tableau Aperçu pour ajouter de nouvelles branches (si nécessaire).
- N'oubliez pas d'enregistrer le fichier en utilisant : File/Save!

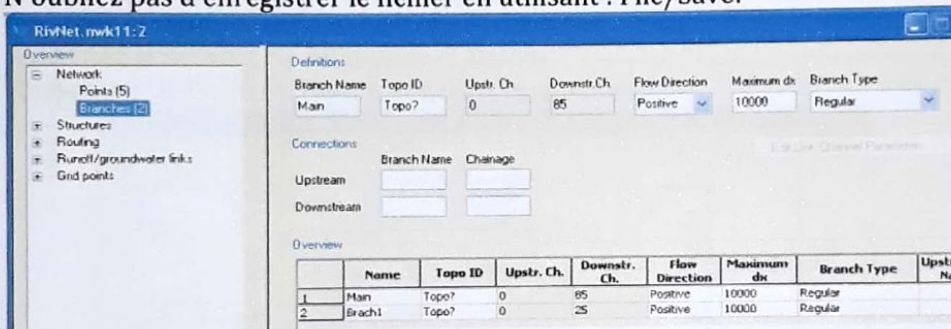


Fig 3.12 affichage des détails

#### Éditeur de la coupe :

- Ouvrir l'éditeur de coupe : File/New/Mike11/Cross Sections (.xns11)
- Sélectionnez l'onglet : Insert Cross Section

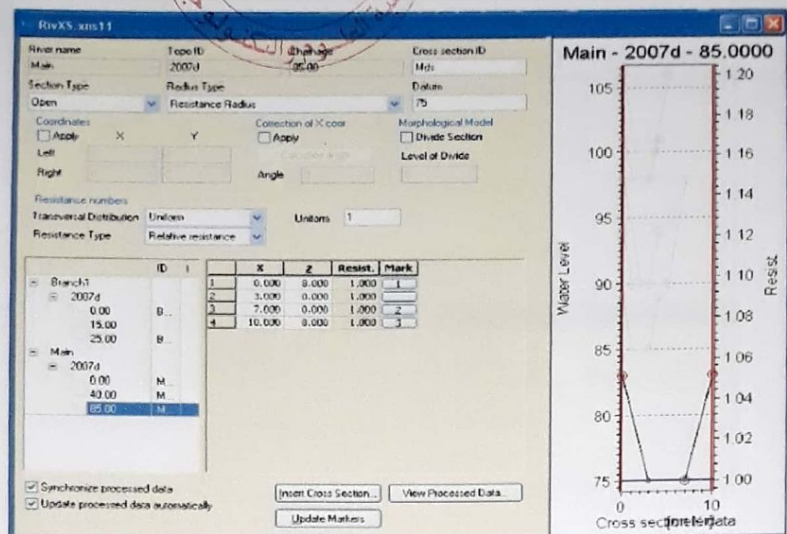


Fig3.13 Éditeur de la coupe

- Spécifiez le nom du bassin, le canal, l'ID du topo, etc.
- Spécifiez le numéro de résistance et Datum
- Remarque : les valeurs Datum et Z sont dépendantes !

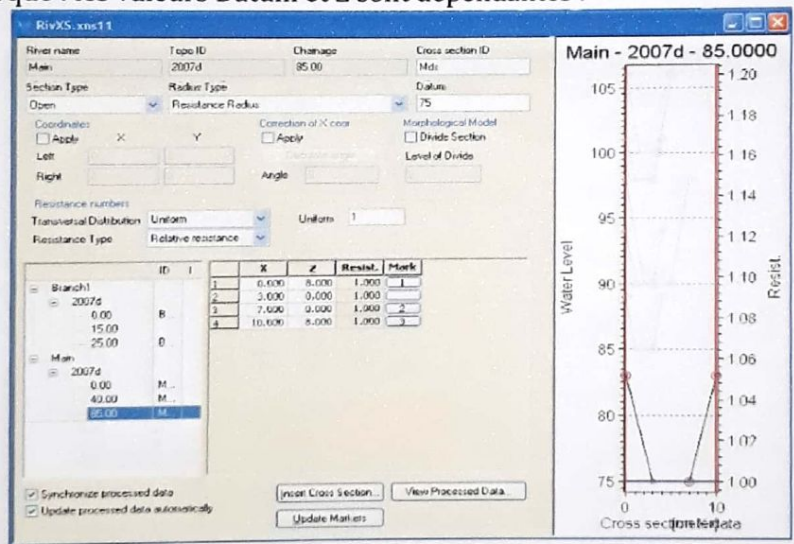


Fig 3.14 spécification des caractéristiques du bassin

- Spécifiez x et z pour chaque point de coupe.
- Spécifiez la « résistance » et les « marques » pour chaque point de la coupe.



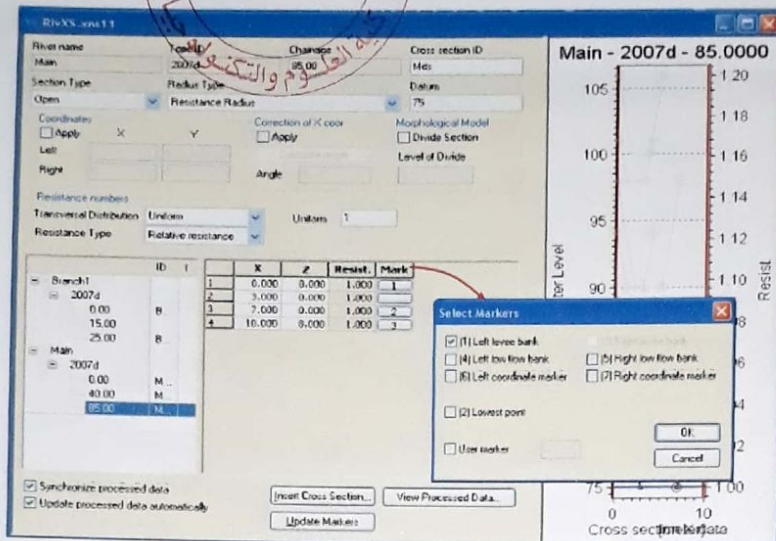
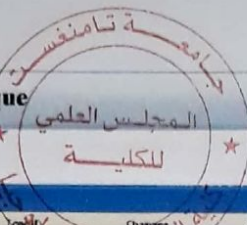


Fig 3.15 les coordonnées des points

- Sélectionnez «Insert Cross Section» pour plus de sections
- Enregistrer en utilisant : File/Save

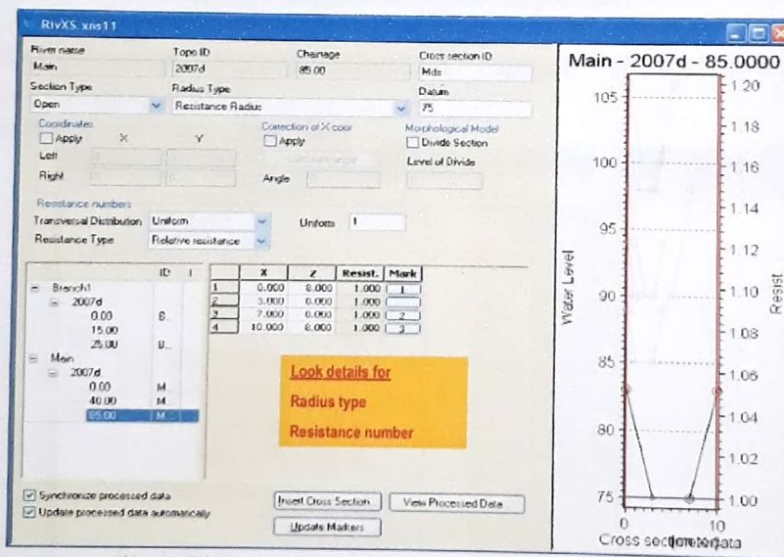


Fig 3.16 l'insertion d'une coupe suplimentaire

### Éditeur de séries temporelles

- Ouvrir l'éditeur de séries temporelles : File/New/Mike Zero/Time Series (.dfs0)/Blank Time Series
- (Remarque : l'éditeur de séries temporelles se trouve sous le groupe de fichiers Mike Zero.)
- Définir l'axe des données et saisir les informations



- Utilisez les onglets Insérer ou Ajouter dans le tableau 'Item information' pour ajouter de nouvelles séries de données

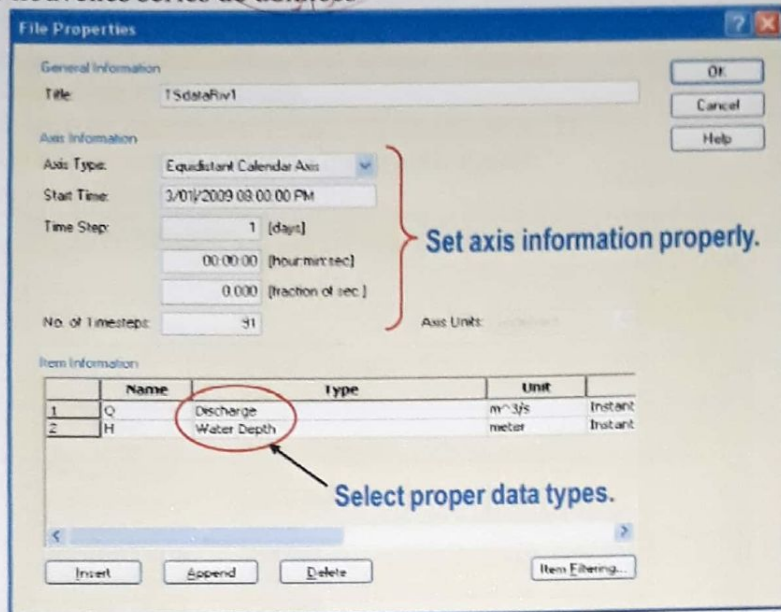


Fig 3.17 Éditeur de séries temporelles

- Remplir les données. Vous pouvez faire un « copier-coller » à partir de l'éditeur de texte et également d'Excel.
- Enregistrer en utilisant : File/Save

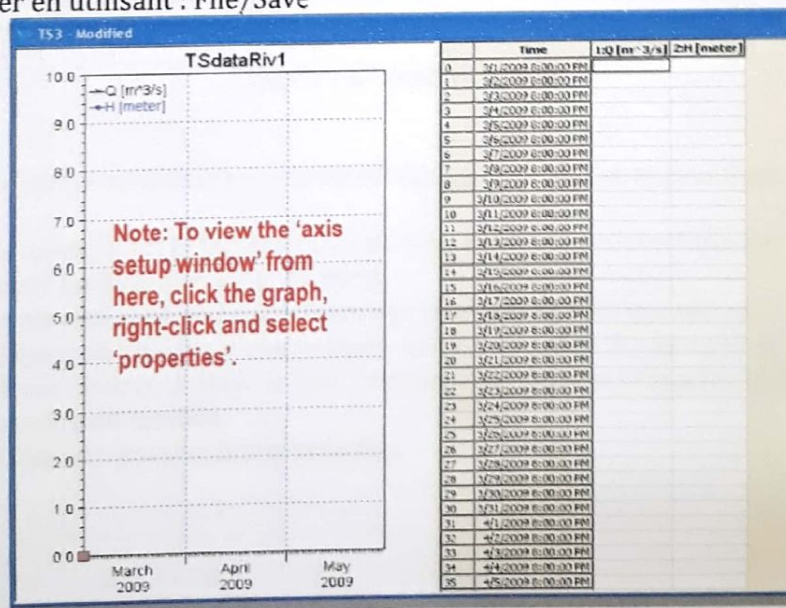


Fig 3.18 l'introduction des données





### Éditeur de limites

- Ouvrir l'éditeur de limites : File/New/Mike11/Boundary Condition (.bnd11)
- Spécifiez la description de la limite : ouvert, point, distribué, fermé, etc
- Spécifiez le type de limite : afflux, h-Q, niveau d'eau, etc.
- Spécifiez la branche et le chaînage.
- Spécifiez le type de données et le type TS (constant ou TS)
- Si le modèle AD est inclus, cochez « Inclure AD limites".
- Enregistrer en utilisant : File/Save

	Boundary Description	Boundary Type	Branch Name	Chainage	Chainage
1	Open	Inflow		0	0
2	Open	Water Level		0	0
3	Open	Q-h		0	0
4	Open	Bottom Level		0	0
5	Open	Sediment Transport		0	0
6	Open	Sediment Supply		0	0
7	Point Source	Inflow		0	0
8	Point Source	Sediment Transport		0	0
9	Distributed Source	Inflow		0	0
10	Distributed Source	Evaporation		0	0
11	Distributed Source	Rainfall		0	0
12	Distributed Source	Heat Balance		0	0
13	Distributed Source	Resistance factor		0	0
14	Distributed Source	Wind field		0	0
15	Global	EU functions		0	0
16	Global	Evaporation		0	0
17	Global	Heat Balance		0	0
18	Global	Rainfall		0	0
19	Global	Resistance factor		0	0
20	Global	Wind field		0	0
21	Structures	Dam		0	0
22	Structures	Dambreak		0	0

Fig 3.19 Éditeur de limites

- La limite «Open » concerne les extrémités libres en amont et en aval du domaine du modèle.
- Les limites amont sont principalement de type «inflow » («Open Inflow») : généralement un hydrogramme de débit.
- Les limites en aval sont principalement des relations Q-h ou des séries chronologiques de niveaux d'eau (« Open ,Q-h » ou « Open Water level »).
- La limite 'Point Source ,Inflow' Inflow' concerne les entrées (+) ou les sorties (-) dans le domaine du modèle.
- La limite «Closed » est une limite sans flux

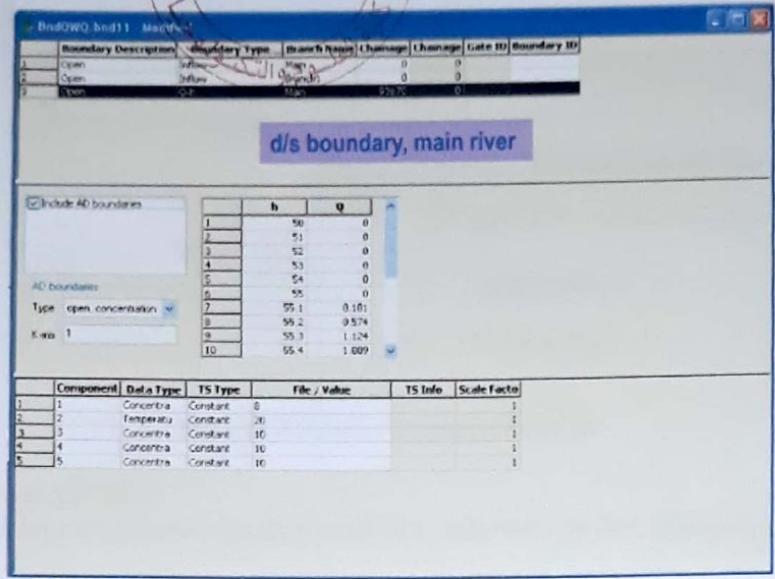


Fig 3.20 les conditions aux limites

**Éditeur de paramètres HD**

- Ouvrir l'éditeur de paramètres HD : File/New/Mike11/HD parameter (.hd11)
- Les valeurs par défaut sont disponibles pour la plupart paramètres.
- Certains paramètres nécessitant une attention particulière sont : la condition initiale, la résistance du lit et l'approximation des vagues.
- Enregistrer en utilisant : File/Save

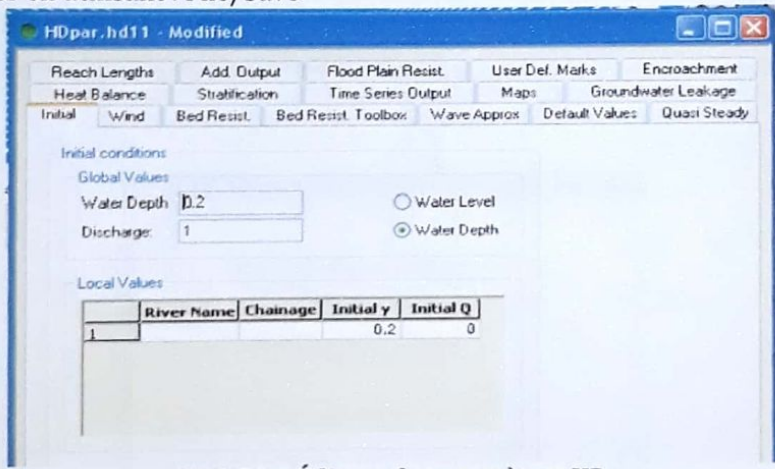


Fig 3.21-a Éditeur de paramètres HD



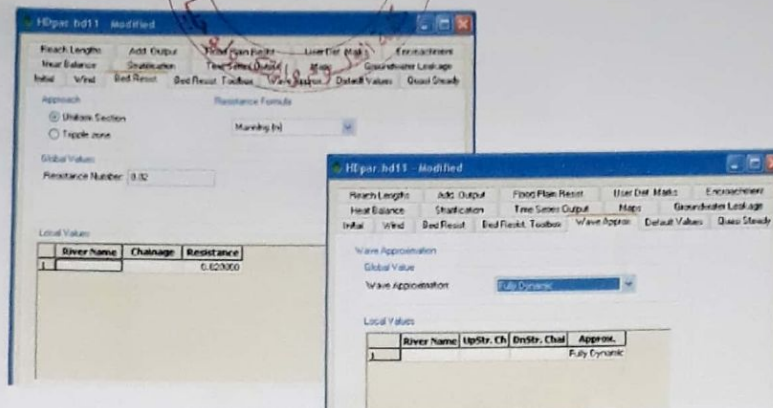


Fig 3.21-bÉditeur de paramètres HD

### Editeur de simulation

- Ouvrir l'éditeur de paramètres de simulation : File/New/Mike11/Simulation (.sim11)
- Icon «Models » - spécifiez les modèles à inclure (par exemple, hydrodynamique, AD, etc.)
- Icon «Input Files» - spécifiez tous les fichiers d'entrée (par exemple, réseau, limite, etc.)
- Icon 'Simulation' – spécifiez le pas de temps et la période de simulation.
- Icon ' Results ' - spécifiez le nom et l'emplacement du fichier de sortie.
- Icon «Start » - si vous avez tout VERT, vous pouvez exécuter la simulation !
- Enregistrer en utilisant : File/Save

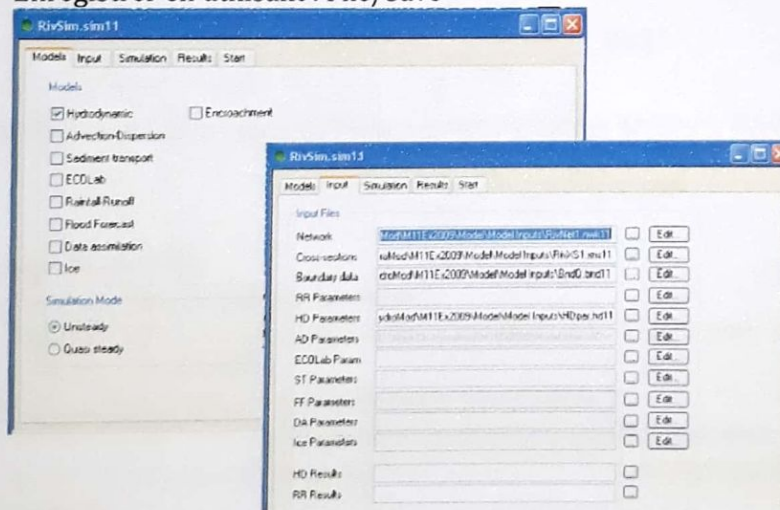


Fig 3.22-a Editeur de simulation

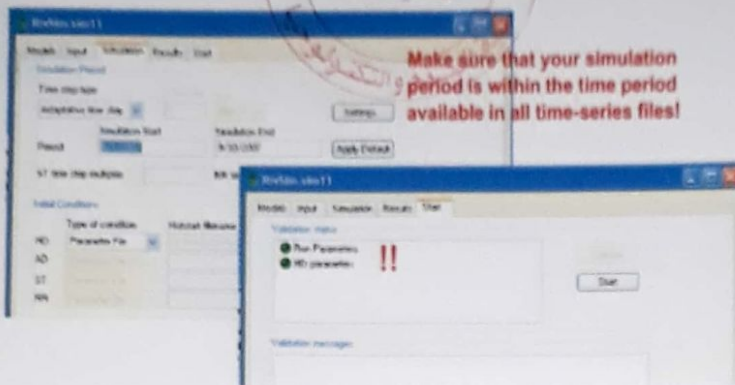


Fig 3.22-b Editeur de simulation

Fin de simulation

**b) Performances du modèle**

Quelques critères couramment utilisés pour évaluer la performance du modèle:

- L'erreur moyenne des carrés MSE (Mean Square Error)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q_{t_i} - \hat{Q}_{t_i})^2$$

- Le coefficient d'efficacité de Nash-Sutcliffe NSC (Nash-Sutcliffe coefficient of efficiency)

$$NSC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Q_{t_i} - \hat{Q}_{t_i})^2}{\sum_{i=1}^N (Q_{t_i} - \bar{Q}_t)^2}$$

- L'erreur root- moyenne-carrée- RMSE (Root-Mean-Square Error)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q_{t_i} - \hat{Q}_{t_i})^2}$$

- Erreur de pourcentage absolue moyenne MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Q_{t_i} - \hat{Q}_{t_i}}{\bar{Q}_{t_i}} \right| \times 100$$

**c) Calage du modèle**

**Qu'est-ce qu'un calage du modèle ?**

- Une procédure pour identifier les « meilleures » valeurs pour des paramètres inconnus. de modèle

**Pourquoi avons-nous besoin de caler un modèle ?**

- Parce que la plupart des modèles hydrologiques/fluviaux sont constitués de paramètres (principalement empiriques) dont les valeurs exactes ne sont pas connues.

**Comment caler un modèle ?**

- En exécutant le modèle à plusieurs reprises avec différents ensembles de valeurs de paramètres et en comparant les résultats du modèle aux valeurs connues ou observées.
- Implique normalement la mise en place d'un problème d'optimisation.
- Réalisé soit « Manuellement » soit « Automatiquement ».





## Bibliographie

Alida Nadège Thiombiano, 2017, développement de méthodes d'analyse fréquentielle non-stationnaire avec l'approche des dépassements de seuil et application avec la précipitation totale journalière dans le sud-est du Canada, Université du Québec.

Adrien Hitz, Richard Davis et Gennady Samorodnitsky : Discrete Extremes. arXiv e-prints, page arXiv :1707.05033, juillet 2017.

B. Renard. Probabilités et Statistiques appliquées à l'Hydrologie. France. 2014, pp.90. fhal-02597049

BERCHTOLD.A, 2014, Données longitudinales et modèles de survie, Modèles paramétriques, Cours de Master, Université de Genève.

CHARLES.P, 2000, Vers une amélioration d'un modèle global pluie-débit au travers d'une approche comparative, Thèse de Doctorat, institut national polytechnique de Grenoble

CHKIR.N, 1994, Mise au point d'un modèle hydrologique conceptuel intégrant l'état hydrique du sol dans la modélisation pluie-débit, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

COLES.S., 2001. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer Series in Statistics, ed. Springer-Verlag. London: Springer-Verlag. 210 p.

DIALLO Ibrahima, SANE Sidy, LES VALEURS EXTREMES, 2017, université de Lille 1.

EMBRECHTS.P, KLÜPPELBERG.C, MIKOSCH.T, 1997. Modelling extremal events for insurance and finance. Stochastic modelling and applied probability. Springer. 648.

GARNIER.H, GILSON, M, BASTOGNE.T, ALAIN.R, Identification de modèles paramétriques à temps continu à partir de données expérimentales. Techniques de l'Ingenieur, Techniques de l'ingénieur, 2007, pp.S7 140. hal-00151330.

J. JACQUET 1964 Les méthodes statistiques dans les calculs de prédétermination des crues Revue de statistique appliquée, tome 12, no 1 (1964), p. 49-61

Jenkinson A.F (1955) - The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements - Quart. J. R. Met. Soc. 81, pp.158-171.

MATHEVET.T, 2005, quels modèles pluie-débit globaux au pas de temps horaire ? Développements empiriques et comparaison de modèles sur un large échantillon de bassins versants, Thèse de doctorat, Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts Centre de : Paris Centre de : Paris.

MUSY.A, 2005, Cours "Hydrologie générale", Laboratoire d'Hydrologie et Aménagements (HYDRAM), Institut des Sciences et Technologies de l'Environnement (ISTE), Ecole Polytechnique Fédérale (EPFL).





Par J.P. LABORDE 2009, elements d'hydrologie de surface, ecole polytechnique de l'universite de nice - sophia antipolis.

Pickands, J. (1975) Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. Annals of Statistics, 3,119-131,1975.<http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176343003>

PUSHPALATHA.R,2013, Low-flow simulation and forecasting on French river basins: A hydrological modelling approach. Earth Sciences. Thèse de doctorat, AgroParisTech.

Samuel Valiquette, 2020,Théorie des valeurs extrêmes dans le cadre des mélanges de Poisson, Sherbrooke, Québec, Canada, septembre 2020.

Stewart, I. T., D. R. Cayan, et al. (2005). "Changes toward earlier streamflow timing across western North America." Journal of Climate 18(8): 1136-1155.

YEVJEVIEH.V,1987, Stochastic models in hydrology, Stochastic Hydrol. Hydraul. 1 (1987) 17- 36.

Z. Yang, J.W. Hardin et C.L. Addy : Score tests for zero-inflation in overdispersed count data. Communications in Statistics - Theory and Methods, 39:2008-2030, 2010.



## Annexe 1

## Tables statistiques usuelles

Table 1: Loi Binomiale

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 10

k	p									
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

k	p									
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000





Table 1: Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

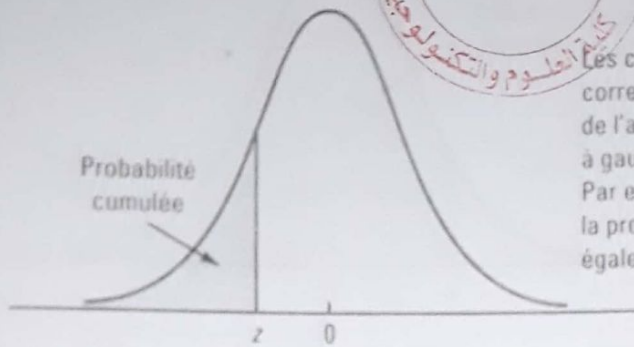
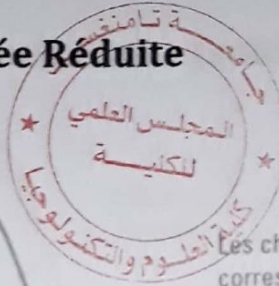
(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

k	p									
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000



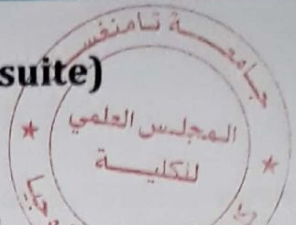
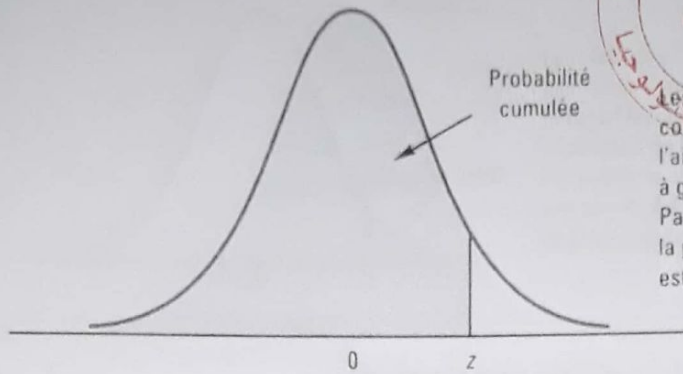
Table 3: Loi Normale Centrée Réduite



Les chiffres de la table correspondent à la valeur de l'aire située sous la courbe à gauche de la valeur  $z$ . Par exemple, pour  $z = -0,85$ , la probabilité cumulée est égale à 0,1977.

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2356	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

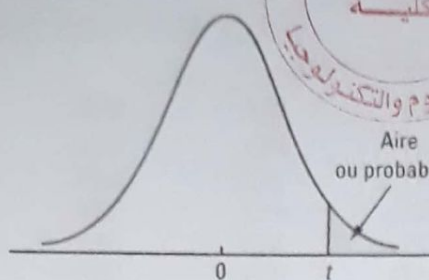
**Table 3: Loi Normale Centrée Réduite (suite)**



Les chiffres de la table correspondent à la valeur de l'aire située sous la courbe à gauche de la valeur  $z$ . Par exemple, pour  $z = 1,25$  la probabilité cumulée est égale à 0,8944.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990



Table 4: Loi du  $t$  de Student

Les chiffres de la table correspondent aux valeurs  $t$  pour différentes aires ou probabilités situées dans la queue supérieure de la distribution de Student. Par exemple, avec 10 degrés de liberté et une aire de 0,05 dans la queue supérieure de la distribution,  $t_{0,05} = 1,812$ . (pour test unilatéral !)

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
31	0,853	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744
32	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738
33	0,853	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733
34	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728

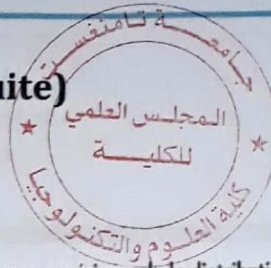
Table 4: Loi du  $t$  de Student (suite)

جامعة تامنغست  
المجلس العلمي  
الكلية  
يوم والتكنولوجيا

Aire dans la queue supérieure de la distribution

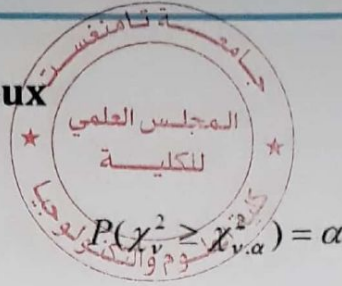
Degrés de liberté	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
35	0,852	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724
36	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719
37	0,851	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715
38	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712
39	0,851	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
41	0,850	1,303	1,683	2,020	2,421	2,701
42	0,850	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698
43	0,850	1,302	1,681	2,017	2,416	2,695
44	0,850	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692
45	0,850	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690
46	0,850	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687
47	0,849	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685
48	0,849	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682
49	0,849	1,299	1,677	2,010	2,405	2,680
50	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
51	0,849	1,298	1,675	2,008	2,402	2,676
52	0,849	1,298	1,675	2,007	2,400	2,674
53	0,848	1,298	1,674	2,006	2,399	2,672
54	0,848	1,297	1,674	2,005	2,397	2,670
55	0,848	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668
56	0,848	1,297	1,673	2,003	2,395	2,667
57	0,848	1,297	1,672	2,002	2,394	2,665
58	0,848	1,296	1,672	2,002	2,392	2,663
59	0,848	1,296	1,671	2,001	2,391	2,662
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
61	0,848	1,296	1,670	2,000	2,389	2,659
62	0,847	1,295	1,670	1,999	2,388	2,657
63	0,847	1,295	1,669	1,998	2,387	2,656
64	0,847	1,295	1,669	1,998	2,386	2,655
65	0,847	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654
66	0,847	1,295	1,668	1,997	2,384	2,652
67	0,847	1,294	1,668	1,996	2,383	2,651
68	0,847	1,294	1,668	1,995	2,382	2,650
69	0,847	1,294	1,667	1,995	2,382	2,649
70	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648
71	0,847	1,294	1,667	1,994	2,380	2,647
72	0,847	1,293	1,666	1,993	2,379	2,646
73	0,847	1,293	1,666	1,993	2,379	2,645
74	0,847	1,293	1,666	1,993	2,378	2,644
75	0,846	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643
76	0,846	1,293	1,665	1,992	2,376	2,642
77	0,846	1,293	1,665	1,991	2,376	2,641
78	0,846	1,292	1,665	1,991	2,375	2,640
79	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639



Table 4: Loi du  $t$  de Student (suite)

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
80	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
81	0,846	1,292	1,664	1,990	2,373	2,638
82	0,846	1,292	1,664	1,989	2,373	2,637
83	0,846	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636
84	0,846	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636
85	0,846	1,292	1,663	1,988	2,371	2,635
86	0,846	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634
87	0,846	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634
88	0,846	1,291	1,662	1,987	2,369	2,633
89	0,846	1,291	1,662	1,987	2,369	2,632
90	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
91	0,846	1,291	1,662	1,986	2,368	2,631
92	0,846	1,291	1,662	1,986	2,368	2,630
93	0,846	1,291	1,661	1,986	2,367	2,630
94	0,845	1,291	1,661	1,986	2,367	2,629
95	0,845	1,291	1,661	1,985	2,366	2,629
96	0,845	1,290	1,661	1,985	2,366	2,628
97	0,845	1,290	1,661	1,985	2,365	2,627
98	0,845	1,290	1,661	1,984	2,365	2,627
99	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
100	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
∞	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Table 5: Loi du Khi-deux

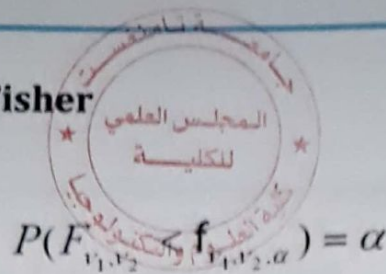


$1 - \alpha$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
$\alpha$	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$v = \text{ddl}$													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	5,92	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,31
21	6,45	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	6,98	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	7,53	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	8,08	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	8,65	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	9,22	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	9,80	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65	55,48
28	10,39	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	10,99	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	11,59	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70

Pour  $v > 30$ , La loi du  $\chi^2$  peut être approximée par la loi normale  $N(v, \sqrt{v})$



**Table 6: Loi du F de Fisher**



$\alpha = 0,975$

$v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	*
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	985	993	1001	1008	1013	1016	1017	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	14,0	14,0	13,9	13,9	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,46	8,38	8,32	8,29	8,27	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,23	6,14	6,08	6,05	6,03	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	5,07	4,98	4,92	4,88	4,86	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,36	4,28	4,21	4,18	4,16	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,89	3,81	3,74	3,70	3,68	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,56	3,47	3,40	3,37	3,35	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	3,31	3,22	3,15	3,12	3,09	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,33	3,23	3,12	3,03	2,96	2,92	2,90	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07	2,96	2,87	2,80	2,76	2,74	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,05	2,95	2,84	2,74	2,67	2,63	2,61	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84	2,73	2,64	2,56	2,53	2,50	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,64	2,55	2,47	2,44	2,41	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68	2,57	2,47	2,40	2,36	2,33	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,72	2,62	2,50	2,41	2,33	2,29	2,26	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56	2,44	2,35	2,27	2,23	2,20	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,62	2,51	2,39	2,30	2,22	2,18	2,15	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,35	2,25	2,17	2,13	2,10	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,50	2,39	2,27	2,17	2,09	2,05	2,02	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,44	2,33	2,21	2,11	2,02	1,98	1,95	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,39	2,28	2,16	2,05	1,97	1,92	1,90	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,34	2,23	2,11	2,01	1,92	1,88	1,85	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20	2,07	1,97	1,88	1,84	1,81	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07	1,94	1,83	1,74	1,69	1,66	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99	1,87	1,75	1,66	1,60	1,57	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,82	1,70	1,60	1,54	1,51	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,36	2,28	2,21	2,00	1,88	1,75	1,63	1,53	1,47	1,43	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85	1,71	1,59	1,48	1,42	1,38	1,35
200	5,10	3,76	3,18	2,85	2,63	2,47	2,35	2,26	2,18	2,11	1,90	1,78	1,64	1,51	1,39	1,32	1,27	1,23
500	5,05	3,72	3,14	2,81	2,59	2,43	2,31	2,22	2,14	2,07	1,86	1,74	1,60	1,46	1,34	1,25	1,19	1,14
*	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,57	1,43	1,30	1,21	1,13	1,00

Table 6: Loi du F de Fisher (suite)

$$P(F_{v_1, v_2} < f_{v_1, v_2, \alpha}) = \alpha$$

 $\alpha = 0,95$ 

$v_2$	$v_1$																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50	100	200	500	*
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	246	248	250	252	253	254	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,62	8,58	8,55	8,54	8,53	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,75	5,70	5,66	5,65	5,64	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,50	4,44	4,41	4,39	4,37	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,81	3,75	3,71	3,69	3,68	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,38	3,32	3,27	3,25	3,24	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,08	3,02	2,97	2,95	2,94	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,86	2,80	2,76	2,73	2,72	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,70	2,64	2,59	2,56	2,55	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,57	2,51	2,46	2,43	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,47	2,40	2,35	2,32	2,31	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,38	2,31	2,26	2,23	2,22	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,31	2,24	2,19	2,16	2,14	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,25	2,18	2,12	2,10	2,08	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,19	2,12	2,07	2,04	2,02	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,15	2,08	2,02	1,99	1,97	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,11	2,04	1,98	1,95	1,93	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,07	2,00	1,94	1,91	1,89	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	2,04	1,97	1,91	1,88	1,86	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07	1,98	1,91	1,85	1,82	1,80	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03	1,94	1,86	1,80	1,77	1,75	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99	1,90	1,82	1,76	1,73	1,71	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96	1,87	1,79	1,73	1,69	1,67	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,84	1,76	1,70	1,66	1,64	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,74	1,66	1,59	1,55	1,53	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,69	1,60	1,52	1,48	1,46	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,65	1,56	1,48	1,44	1,41	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,79	1,70	1,60	1,51	1,43	1,38	1,35	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,57	1,48	1,39	1,34	1,31	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,52	1,41	1,32	1,26	1,22	1,19
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,48	1,38	1,28	1,21	1,16	1,11
*	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,46	1,35	1,24	1,17	1,11	1,00



annexe 2  
Loi de Khi-deux

Le tableau donne x tel que  $P(K > x) = p$



P	0.999	0.995	0.99	0.98	0.95	0.9	0.8	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
ddl														
1	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0039	0,0158	0,0642	1,6424	2,7055	3,8415	5,4119	6,6349	7,8794	10,8276
2	0,0020	0,0100	0,0201	0,0404	0,1026	0,2107	0,4463	3,2189	4,6052	5,9915	7,8240	9,2103	10,5966	13,8155
3	0,0243	0,0717	0,1148	0,1848	0,3518	0,5844	1,0052	4,6416	6,2514	7,8147	9,8374	11,3449	12,8382	16,2662
4	0,0908	0,2070	0,2971	0,4294	0,7107	1,0636	1,6488	5,9886	7,7794	9,4877	11,6678	13,2767	14,8603	18,4668
5	0,2102	0,4117	0,5543	0,7519	1,1455	1,6103	2,3425	7,2893	9,2364	11,0705	13,3882	15,0863	16,7496	20,5150
6	0,3811	0,6757	0,8721	1,1344	1,6354	2,2041	3,0701	8,5581	10,6446	12,5916	15,0332	16,8119	18,5476	22,4577
7	0,5985	0,9893	1,2390	1,5643	2,1673	2,8331	3,8223	9,8032	12,0170	14,0671	16,6224	18,4753	20,2777	24,3219
8	0,8571	1,3444	1,6465	2,0325	2,7326	3,4895	4,5936	11,0301	13,3616	15,5073	18,1682	20,0902	21,9550	26,1245
9	1,1519	1,7349	2,0879	2,5324	3,3251	4,1682	5,3801	12,2421	14,6837	16,9190	19,6790	21,6660	23,5894	27,8772
10	1,4787	2,1559	2,5582	3,0591	3,9403	4,8652	6,1791	13,4420	15,9872	18,3070	21,1608	23,2093	25,1882	29,5883
11	1,8339	2,6032	3,0535	3,6087	4,5748	5,5778	6,9887	14,6314	17,2750	19,6751	22,6179	24,7250	26,7568	31,2641
12	2,2142	3,0738	3,5706	4,1783	5,2260	6,3038	7,8073	15,8120	18,5493	21,0261	24,0540	26,2170	28,2995	32,9095
13	2,6172	3,5650	4,1069	4,7654	5,8919	7,0415	8,6339	16,9848	19,8119	22,3620	25,4715	27,6882	29,8195	34,5282
14	3,0407	4,0747	4,6604	5,3682	6,5706	7,7895	9,4673	18,1508	21,0641	23,6848	26,8728	29,1412	31,3193	36,1233
15	3,4827	4,6009	5,2293	5,9849	7,2609	8,5468	10,3070	19,3107	22,3071	24,9958	28,2595	30,5779	32,8013	37,6973
16	3,9416	5,1422	5,8122	6,6142	7,9616	9,3122	11,1521	20,4651	23,5418	26,2962	29,6332	31,9999	34,2622	39,2524
17	4,4161	5,6972	6,4078	7,2550	8,6718	10,0852	12,0023	21,6146	24,7690	27,5871	30,9950	33,4087	35,7185	40,7902
18	4,9048	6,2648	7,0149	7,9062	9,3905	10,8649	12,8570	22,7595	25,9894	28,8693	32,3462	34,8053	37,1565	42,3124
19	5,4068	6,8440	7,6327	8,5670	10,1170	11,6509	13,7158	23,9004	27,2036	30,1435	33,6874	36,1909	38,5823	43,8202
20	5,9210	7,4338	8,2604	9,2367	10,8508	12,4426	14,5784	25,0375	28,4120	31,4104	35,0196	37,5662	39,9968	45,3147
21	6,4467	8,0337	8,8972	9,9146	11,5913	13,2396	15,4446	26,1711	29,6151	32,6706	36,3434	38,9322	41,4011	46,7970
22	6,9830	8,6427	9,5425	10,6000	12,3380	14,0415	16,3140	27,3015	30,8133	33,9244	37,6595	40,2894	42,7957	48,2679
23	7,5292	9,2604	10,1957	11,2926	13,0905	14,8480	17,1865	28,4288	32,0069	35,1725	38,9683	41,6384	44,1813	49,7282
24	8,0849	9,8862	10,8564	11,9918	13,8484	15,6587	18,0618	29,5533	33,1962	36,4150	40,2704	42,9798	45,5585	51,1786
25	8,6493	10,5197	11,5240	12,6973	14,6114	16,4734	18,9398	30,6752	34,3816	37,6525	41,5661	44,3141	46,9279	52,6197
26	9,2221	11,1602	12,1981	13,4086	15,3792	17,2919	19,8202	31,7946	35,5632	38,8851	42,8558	45,6417	48,2899	54,0520
27	9,8028	11,8076	12,8785	14,1254	16,1514	18,1139	20,7030	32,9117	36,7412	40,1133	44,1400	46,9629	49,6449	55,4760
28	10,3909	12,4613	13,5647	14,8475	16,9279	18,9392	21,5880	34,0266	37,9159	41,3371	45,4188	48,2782	50,9934	56,8923
29	10,9861	13,1211	14,2565	15,5745	17,7084	19,7677	22,4751	35,1394	39,0875	42,5570	46,6927	49,5879	52,3356	58,3012
30	11,5880	13,7867	14,9535	16,3062	18,4927	20,5992	23,3641	36,2502	40,2560	43,7730	47,9618	50,8922	53,6720	59,7031
40	17,9164	20,7065	22,1643	23,8376	26,5093	29,0505	32,3450	47,2685	51,8051	55,7585	60,4361	63,6907	66,7660	73,4020
50	24,6739	27,9907	29,7067	31,6639	34,7643	37,6886	41,4492	58,1638	63,1671	67,5048	72,6133	76,1539	79,4900	86,6608
60	31,7383	35,5345	37,4849	39,6994	43,1880	46,4589	50,6406	68,9721	74,3970	79,0819	84,5799	88,3794	91,9517	99,6072
70	39,0364	43,2752	45,4417	47,8934	51,7393	55,3289	59,8978	79,7146	85,5270	90,5312	96,3875	100,4252	104,2149	112,3169
80	46,5199	51,1719	53,5401	56,2128	60,3915	64,2778	69,2069	90,4053	96,5782	101,8795	108,0693	112,3288	116,3211	124,8392
90	54,1552	59,1963	61,7541	64,6347	69,1260	73,2911	78,5584	101,0537	107,5650	113,1453	119,6485	124,1163	128,2989	137,2084
100	61,9179	67,3276	70,0649	73,1422	77,9295	82,3581	87,9453	111,6667	118,4980	124,3421	131,1417	135,8067	140,1695	149,4493
120	77,7551	83,8516	86,9233	90,3667	95,7046	100,6236	106,8056	132,8063	140,2326	146,5674	153,9182	158,9502	163,6482	173,6174
140	93,9256	100,6548	104,0344	107,8149	113,6593	119,0293	125,7581	153,8537	161,8270	168,6130	176,4709	181,8403	186,8468	197,4508
160	110,3603	117,6793	121,3456	125,4400	131,7561	137,5457	144,7834	174,8283	183,3106	190,5165	198,8464	204,5301	209,8239	221,0190
180	127,0111	134,8844	138,8204	143,2096	149,9688	156,1526	163,8682	195,7434	204,7037	212,3039	221,0772	227,0561	232,6198	244,3705
200	143,8428	152,2410	156,4320	161,1003	168,2786	174,8353	183,0028	216,6088	226,0210	233,9943	243,1869	249,4451	255,2642	267,5405
250	186,5541	196,1606	200,9386	206,2490	214,3916	221,8059	231,0128	268,5986	279,0504	287,8815	298,0388	304,9396	311,3462	324,8324
300	229,9634	240,6634	245,9725	251,8637	260,8781	269,0679	279,2143	320,3971	331,7885	341,3951	352,4246	359,9064	366,8444	381,4252
400	318,2596	330,9028	337,1553	344,0781	354,6410	364,2074	376,0218	423,5895	436,6490	447,6325	460,2108	468,7245	476,6064	493,1318
500	407,9470	422,3034	429,3875	437,2194	449,1468	459,9261	473,2099	526,4014	540,9303	553,1268	567,0698	576,4928	585,2066	603,4460
600	498,6229	514,5289	522,3651	531,0191	544,1801	556,0560	570,6680	628,9433	644,8004	658,0936	673,2703	683,5156	692,9816	712,7712
700	590,0480	607,3795	615,9075	625,3175	639,6130	652,4973	668,3308	731,2805	748,3591	762,6607	778,9721	789,9735	800,1314	821,3468
800	682,0665	700,7250	709,8969	720,0107	735,3623	749,1852	766,1555	833,4557	851,6712	866,9114	884,2789	895,9843	906,7862	929,3289
900	774,5698	794,4750	804,2517	815,0267	831,3702	846,0746	864,1125	935,4987	954,7819	970,9036	989,2631	1001,6296	1013,0364	1036,8260



## Annexe 3

## Kolmogorov-Smirnov



Seuils critiques $D_\alpha(n)$					
$n$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404

Seuils critiques $D_\alpha(n)$					
$n$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.210	0.220	0.240	0.270	0.320
30	0.190	0.200	0.220	0.240	0.290
35	0.180	0.190	0.210	0.230	0.270
> 35	$1.07/\sqrt{n}$	$1.14/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$